FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT JENA
Fakultät für Mathematik und Informatik

seit 1558

JENAER SCHRIFTEN ZUR

MATHEMATIK UND INFORMATIK

Eingang: 17. Dezember 2012   Math / Inf / 04 / 2012
Als Manuskript gedruckt

CAS-Testaufgaben zur Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I

Matthias Müller

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Abteilung für Didaktik der Mathematik und Informatik
Ernst-Abbe-Platz 2
07743 Jena

Matthias.Mueller.2@uni-jena.de

CAS-Testaufgaben zur Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I

Matthias Müller

Nach dem Abschluss eines Themengebietes im Mathematikunterricht, war es schon immer üblich, zu überprüfen, ob der Unterricht die notwendige inhaltliche Bandbreite hatte und ob er dem Lehrplan bzw. den Bildungsstandards entsprach. Der Einsatz digitaler Werkzeuge im Unterricht wie z.B. Computeralgebra-Systemen (CAS) beeinflusst auch die eben angesprochene Unterrichtsreflexion.

Die nachstehenden Aufgaben sollen eine Orientierung bieten, wie Aufgaben zur Lernstandsermittlung unter Verwendung digitaler Werkzeuge aussehen könnten. Die Lehrkraft kann durch den Einsatz der hier vorgestellten Aufgaben individualisierte und differenzierte Rückmeldungen zu dem Lernstand der Schülerinnen und Schüler erhalten. Dabei werden die Bezüge zum Thüringer Lehrplan [1] und den Bildungsstandards [2] hergestellt. Auf dieser Grundlage können Schlussfolgerungen für den Unterricht und dessen Fortentwicklung gezogen werden. Die nachfolgenden Testaufgaben sollen in dieser Hinsicht eine Unterstützung für die Lehrkräfte sein. Das zugrundeliegende Fachdidaktische Konzept lehnt sich an einem Vorbild aus der Informatikdidaktik an. [3]

Die Testaufgaben und weitere Hinweise sind unter folgender Adresse im Internet zu finden. An dieser Stelle kann man auch mit anderen Lehrkräften, die diese Aufgaben einsetzen, in Kontakt treten und an einem Erfahrungsaustausch teilnehmen:

http://www.mz.jena.de/moodle/course/view.php?id=1373

Allen Aufgaben sind Übersichtsblätter vorangestellt, auf denen das Themengebiet, die Klassenstufe und eine Kurzbeschreibung angeführt sind. Desweiteren werden detaillierte Lehrplanbezüge hergestellt und Vorschläge für mögliche Zuordnungen zu den mathematischen Kompetenzen unterbreitet. Jede Aufgabe schließt mit möglichen Lösungsvorschlägen. Die beigefügten Screenshots wurden mit der TI-Nspire™ CAS Teacher Software angefertigt. Zur Bearbeitung der Aufgaben eignen sich auch andere CAS-Handhelds oder entsprechende Softwareapplikationen.

Vor dem Einsatz der Testaufgaben im Unterricht sollte durch jede Lehrkraft selbständig ein kurzer Auswertungsbogen, welcher Lösungsideen und einen Bewertungsmaßstab beinhaltet, erstellen werden. Der Auswertungsbogen sollte auf die jeweilige Klasse abgestimmt sein. Die beiliegenden Lösungshinweise und Erläuterungen zu den einzelnen Aufgaben sollen Anregungen für den Auswertungsbogen geben. Maßgebend sollte jedoch immer der erteilte Unterricht sein. Um ein differenziertes Bild des Lernstands in einer Klasse zu erhalten, liegt jede Testaufgabe in drei Niveaustufen vor. Diese Niveaustufen werden mit abnehmender Schwierigkeit als N1, N2 und N3 bezeichnet. Die entsprechenden Arbeitsblätter jeder Testaufgabe unterscheiden sich innerhalb der Niveaustufen in der Anzahl der Aufgaben, im Umfang der Aufgabenstellung, in der Informationsbereistellung oder in der Anzahl der Hinwiese. Aus Gründen der einfachen Handhabung sind im Folgenden alle Aufgaben in allen drei Niveaustufen aufgeführt. Die Lehrkraft kann im Vorhinein eine Zuordnung treffen, welche Schülerin bzw. welcher Schüler welche Niveaustufe bearbeiten soll, oder man lässt die Schülerinnen und Schüler selbst wählen. Damit die Schüler einfache individualisierte Rückmeldungen geben können, sind am Rand der Arbeitsblätter kleine Tabellen mit Smileys abgedruckt. Dort können Schüler eine persönliche Einschätzung zu jeder Teilaufgabe abgeben. Sie sollen dabei einschätzen, wie gut sie mit der Aufgabe zurechtgekommen sind, bzw. wie schwierig sie die Aufgabe empfanden.

Angestrebt wird, dass der Test von allen Schülerinnen und Schülern einer Klasse bearbeitet wird. Die Schülerinnen und Schüler sollen im Vorfeld erfahren, dass ein Test durchgeführt wird. Sie sollen auf ihn jedoch nicht speziell vorbereitet werden. Die Schülerantworten sollten nicht benotet werden, da Effekte wie beispielsweise Aufregung und Versagensangst vermieden werden sollten. Jede Lehrkraft kann entsprechend der inhaltlichen Ausrichtung des Unterrichts nur einzelne Teilaufgaben auswählen bzw. die Aufgaben modifizieren. Außerdem kann je nach organisatorischen Vorrausetzungen eine Zeitspanne von 45 oder 90 Minuten gewählt werden.

Die unterrichtende Lehrkraft korrigiert die Antworten der Schülerinnen und Schüler und ermittelt für jede Teilaufgabe die Anzahl an Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe gelöst, teilweise gelöst bzw. nicht gelöst haben. Anschließend wird für jede Teilaufgabe das Korrekturergebnis in Beziehung zum Erwartungshorizont gesetzt. Dabei sollte ein besonderes Augenmerk auf Auffälligkeiten wie z. B. typische Fehler gelegt werden. Eine differenziertere Sichtweise entsteht durch die Auswertung der drei Niveaustufen. Darüber hinaus können individuelle Hinweise der Schüler ausgewertet werden, die sie in den nebenstehenden Tabellen vermerkt haben. Schließlich können Schlussfolgerungen zum Lernstand der Schülerinnen und Schüler, sowie zum Unterricht und dessen Fortentwicklung gezogen werden.

Referenzen

[1] THÜRINGER KULTUSMINISTERIUM (Hrsg.) (2011): Lehrplan für den Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife, Mathematik.

[2] SEKRETARIAT DER STÄNDIGEN KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER LÄNDER IN DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND (Hrsg.) (2004 b): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003. München. Wolters Kluwer.

[3] FOTHE, M; LUDWIG, H.; KÜSPERT, K.; WENZEL, M. (2006): Unterrichtsreflexion mit ungewöhnlichen Mitteln. LOG IN Nr. 141/142. S.52-63

Inhalt

Aufgabe 1: Linea – Die Funktion des gespannten Fadens.

Themengebiet	*Lineare Funktionen*

Klassenstufe	*9*

Kurzbeschreibung	*Woher kommt eigentlich der Begriff lineare Funktion? Die Begriffsklärung des aus dem lateinischen stammenden Wortes **linear** führt zu einer entscheidenden Eigenschaft der linearen Funktionen. In den sechs Teilaufgaben müssen die Schüler ihr gesammeltes Wissen über lineare Funktionen zur Anwendung bringen und sogar noch darüber hinaus gehen, wenn sie in der letzten Teilaufgabe die Funktion mit dem größten Absolutglied bestimmen sollen. An dieser Stelle hilft vielleicht nur ein DGS oder ein CAS weiter.*

Lehrplanbezüge	*...die Bedeutung der Parameter m und n in der Funktionsgleichung y=f(x)=mx+n für die Eigenschaften der linearen Funktion erläutern.* *...die gegenseitige Lage zweier Geraden aus den Eigenschaften der zugehörigen linearen Funktionen bestimmen (Parallelität, Orthogonalität, Existenz eines Schnittpunktes, Identität).* *...Funktionsgleichungen aus vorgegebenen Eigenschaften des Graphen einer linearen Funktion (zwei Punkte, Punkt und Anstieg) bestimmen.* *...Computersoftware zum Erstellen von Tabellen, Diagrammen und Funktionsgraphen nutzen.*

Mathematische Leitideen	*Funktionaler Zusammenhang* *Raum und Form* *Zahl*

Vorschlag zur Zuordnung der Mathematischen Kompetenzen						
Aufgabe	**Mathematisch argumentieren**	**Probleme mathematisch lösen**	**Mathematisch modellieren**	**Mathematische Darstellungen verwenden**	**Mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen**	**Mathematisch Kommunizieren**
A1				x	x	
A2				x	x	
A3	x			x	x	
A4				x	x	
A5					x	x
A6	x	x		x	x	x

N1 Linea – Die Funktion des gespannten Fadens.

Der Begriff der **linearen Funktion** leitet sich vom lateinischen Wort *linea* ab, das so viel bedeutet wie Leine, Schnur oder Faden. Der Graph einer solchen Funktion sieht demnach wie ein gespannter Faden aus. Aus mathematischer Sicht ist es interessant, wie eine Funktionsgleichung beschaffen sein muss, damit der Graph der Funktion einer Geraden entspricht.

☹	😐	☺

A1 **Gib die allgemeine Funktionsgleichung für eine lineare Funktion an und beschreibe die Bedeutung der Parameter.**

Gegeben sind die beiden linearen Funktionen:

$$f_1: \quad -3\sqrt{2} = \sqrt{2}y - x$$

$$f_2: \quad 3 = 2y + 2\sqrt{2}x$$

A2 **Bestimme den Schnittpunkt der Graphen der beiden linearen Funktionen.**

Die Graphen der beiden Geraden aus A2 schneiden sich offensichtlich. Allerdings können die Graphen zweier linearer Funktionen auch andere Lagebeziehungen aufweisen.

A3 **Gib weitere mögliche Lagebeziehungen der Graphen zweier linearer Funktionen an und überlege dir zu jeder ein Beispiel in Bezug auf f_1.**

Eine lineare Funktion ist eindeutig durch zwei Punkte bestimmt. Gegeben sind die beiden Punkte $P_1(1, -3\sqrt{2})$ $P_2(-4, 2\sqrt{2})$.

A4 **Bestimme die Funktionsgleichung der linearen Funktion f_3, deren Graph durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft..**

Die Graphen der beiden Funktionen f_1, f_2 von oben und deiner Beispiel-Funktionen aus Aufgabe A3, sowie der Funktion f_3, die du eben bestimmt hast, begrenzen eine Fläche in der Ebene.

A5 **Berechne den Flächeninhalt dieser Fläche.**

Die berechnete Fläche aus Aufgabe A5 wird durch die Graphen der linearen Funktionen f_1, f_2, f_3, sowie deiner Beispielfunktionen begrenzt.

Eine weitere lineare Funktion ist $\boldsymbol{n = 2y + 6x}$ mit $n \in \mathbb{R}$.
Ein interessantes mathematisches Problem ist das folgende:

A6 **Bestimme die lineare Funktion $n = 2y + 6x$ so, dass n maximal wird, aber der Graph dieser Funktion die Fläche aus Aufgabe A5 noch schneidet.**

N2 Linea – Die Funktion des gespannten Fadens.

Der Begriff der **linearen Funktion** leitet sich vom lateinischen Wort *linea* ab, das so viel bedeutet wie Leine, Schnur oder Faden. Der Graph einer solchen Funktion sieht demnach wie ein gespannter Faden aus. Aus mathematischer Sicht ist es interessant, wie eine Funktionsgleichung beschaffen sein muss, damit der Graph der Funktion einer Geraden entspricht.

☹	😐	☺

A1 **Gib die allgemeine Funktionsgleichung für eine lineare Funktion an und beschreibe die Bedeutung der Parameter.**

Gegeben sind die beiden linearen Funktionen:

$$f_1(x) = \frac{2}{3}x + \sqrt{2} - 1$$

$$f_2(x) = -\frac{3}{2}x + \sqrt{2} - 1$$

A2 **Bestimme den Schnittpunkt der Graphen der beiden linearen Funktionen.**

Die Graphen der beiden Geraden aus A2 schneiden sich offensichtlich. Allerdings können die Graphen zweier linearer Funktionen auch andere Lagebeziehungen aufweisen.

A3 **Gib weitere mögliche Lagebeziehungen der Graphen zweier linearer Funktionen an und überlege dir zu jeder ein Beispiel in Bezug auf f_1.**

Eine lineare Funktion ist eindeutig durch zwei Punkte bestimmt. Gegeben sind die beiden Punkte $P_1(1,-4)$ und $P_2(-5,5)$.

A4 **Bestimme die Funktionsgleichung der linearen Funktion f_3, deren Graph durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft..**

Die Graphen der beiden Funktionen f_1, f_2 von oben und deiner Beispiel-Funktionen aus Aufgabe A3, sowie der Funktion f_3, die du eben bestimmt hast, begrenzen eine Fläche in der Ebene.

A5 **Berechne den Flächeninhalt dieser Fläche.**

Die berechnete Fläche aus Aufgabe A5 wird durch die Graphen der linearen Funktionen f_1, f_2, f_3, sowie deiner Beispielfunktionen begrenzt.

Eine weitere lineare Funktion ist $\mathbf{n = y + 3x}$ für eine beliebige reelle Zahl n. Ein interessantes mathematisches Problem ist das folgende:

A6 **Bestimme die lineare Funktion $\mathbf{n = y + 3x}$ so, dass n maximal wird, aber der Graph dieser Funktion die Fläche aus Aufgabe A5 noch schneidet.**

N3 Linea – Die Funktion des gespannten Fadens.

Der Begriff der **linearen Funktion** leitet sich vom lateinischen Wort *linea* ab, das so viel bedeutet wie Leine, Schnur oder Faden. Der Graph einer solchen Funktion sieht demnach wie ein gespannter Faden aus. Aus mathematischer Sicht ist es interessant, wie eine Funktionsgleichung beschaffen sein muss, damit der Graph der Funktion einer Geraden entspricht.

☹	😐	☺

A1 **Gib die allgemeine Funktionsgleichung für eine lineare Funktion an und beschreibe die Bedeutung der Parameter.**

Gegeben sind die beiden linearen Funktionen:

$$f_1(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

$$f_2(x) = -\frac{3}{2}x + 15$$

A2 **Bestimme den Schnittpunkt der Graphen der beiden linearen Funktionen.**

Die Graphen der beiden Geraden aus A2 schneiden sich offensichtlich. Allerdings können die Graphen zweier linearer Funktionen auch andere Lagebeziehungen aufweisen.

A3 **Gib weitere mögliche Lagebeziehungen der Graphen zweier linearer Funktionen an und überlege dir zu jeder ein Beispiel in Bezug auf f_1.**

Eine lineare Funktion ist eindeutig durch zwei Punkte bestimmt. Gegeben sind die beiden Punkte $P_1(1,-4)$ und $P_2(-5,5)$.

A4 **Bestimme die Funktionsgleichung der linearen Funktion f_3, deren Graph durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft..**

Die Graphen der beiden Funktionen f_1, f_2 von oben und deiner Beispiel-Funktionen aus Aufgabe A3, sowie der Funktion f_3, die du eben bestimmt hast, begrenzen eine Fläche in der Ebene.

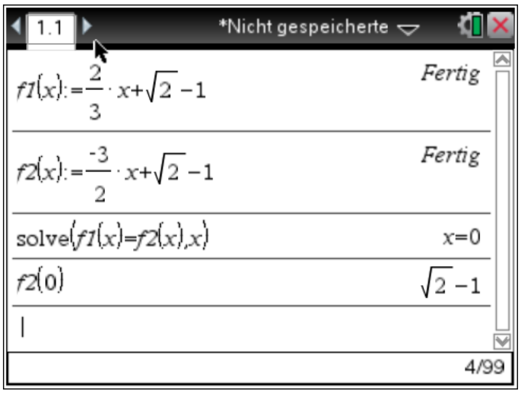
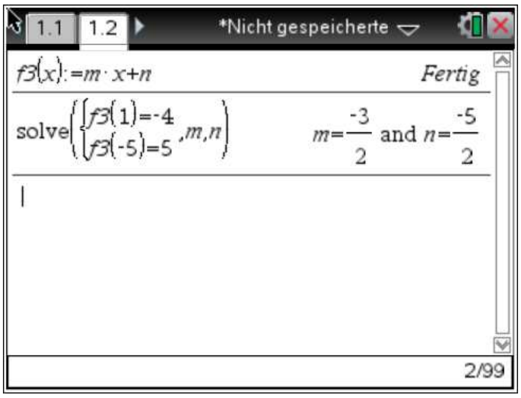
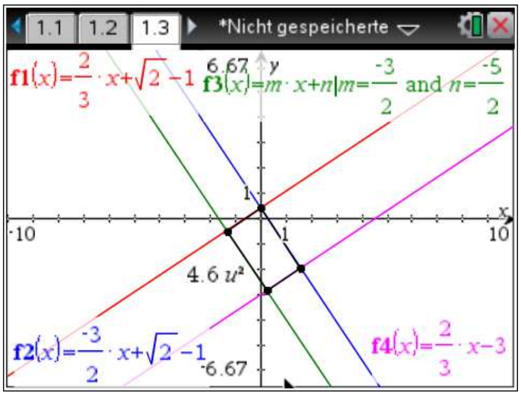
A5 **Berechne den Flächeninhalt dieser Fläche.**

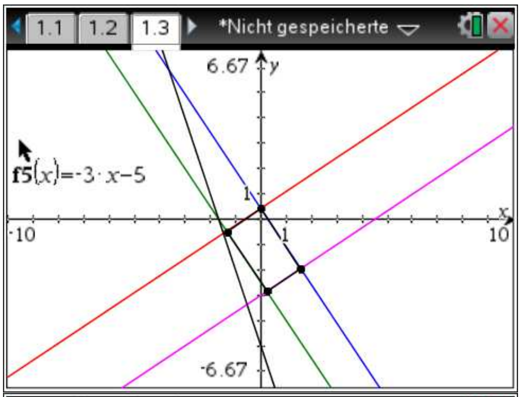
Die berechnete Fläche aus Aufgabe A5 wird durch die Graphen der linearen Funktionen f_1, f_2, f_3, sowie deiner Beispielfunktionen begrenzt.

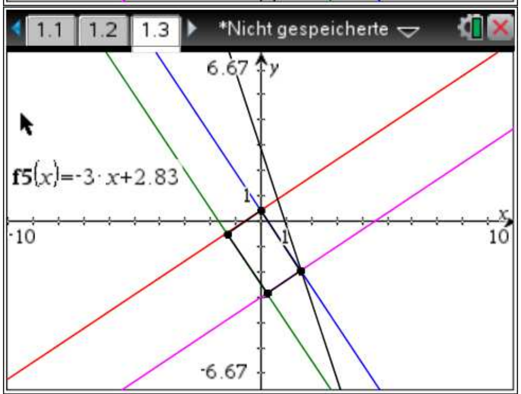
Eine weitere lineare Funktion ist $\mathbf{y = -3x + n}$ für eine beliebige reelle Zahl n. Ein interessantes mathematisches Problem ist das folgende:

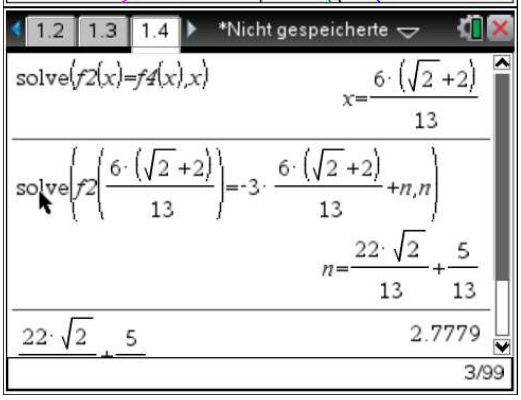
A6 **Bestimme die lineare Funktion $\mathbf{y = -3x + n}$ so, dass n maximal wird, aber der Graph dieser Funktion die Fläche aus Aufgabe A5 noch schneidet.**

Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Linea – Die Funktion des gespannten Fadens.

Aufgabe	Lösungshinweis	Screenshot (Beispiel)
A1	Die allgemeine Funktionsgleichung lautet y=f(x)=mx+n, wobei m den Anstieg und n das Absolutglied repräsentiert. Beide Parameter sind reellwertig. Der Schnittpunkt mit der Ordinatenachse ist S_0 (0; n).	
A2	N1: $S\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}; -\frac{3}{2}\right)$ N2: $S\left(0; \sqrt{2}-1\right)$ N3: $S\left(6; 6\right)$	
A3	Die Graphen zweier linearer Funktionen können parallel verlaufen, dann gibt es keinen Schnittpunkt. Desweiteren können die Graphen zweier linearer Funktionen identisch sein, dann gibt es unendlich viele Schnittpunkte.	
A4	N1: $f_3(x) = -\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$ N2: $f_3(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ N3: $f_3(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$	
A5	Es handelt sich bei der Fläche um ein Rechteck, da die Graphen der linearen Funktionen sich orthogonal schneiden. Demnach muss man die jeweiligen Schnittpunkte bestimmen und die Länge zweier Seiten bestimmen. $\lvert l \rvert = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	

<table>
<tr>
<td>A6</td>
<td>Es ist sinnvoll sich zunächst ein Beispiel zu überlegen, dafür setzt man $n = -5$. Verwendet man ein DGS, kann man den Graphen der Funktion $y = -3x - 5$ parallel verschieben und bekommt eine Idee. Der Graph der Funktion muss die Fläche in einer Ecke schneiden, damit n maximal wird. Jetzt muss man nur noch die Koordinaten der Ecke bestimmen und das n exakt berechnen lassen.</td>
<td>






</td>
</tr>
</table>

Aufgabe2: Wann ist weniger mehr? – Der optimale Winkel beim Kugelstoßen.

Themengebiet	*Quadratische Funktionen*

Klassenstufe	*9/ (10 BLF)*

Kurzbeschreibung	*Seit dem **David Storl** 2011 als erster Deutscher Weltmeister im Kugelstoßen geworden ist, rückt die olympische Disziplin immer mehr in den Focus des öffentlichen Interesses. Für viele Schüler ist das Kugelstoßen nichts Unbekanntes, die meisten haben in ihrem Sportunterricht eigene Erfahrungen dazu sammeln können.* *Die Flugbahn der Kugel lässt sich mathematisch gut mit quadratischen Funktionen beschreiben. Aufgrund der geringen Geschwindigkeiten hat der Luftwiderstand keinen Einfluss und die ballistische Flugkurve gleicht der Wurfparabel des schrägen Wurfes. Spannend ist, ob auch der optimale Winkel beim Kugelstoßen ähnlich wie beim schrägen Wurf 45° beträgt?*

Lehrplanbezüge	*...quadratische Funktionen auf Definitions- und Wertebereich, Scheitelpunkt, Achsenschnittpunkte, Monotonie, Symmetrie untersuchen und graphisch darstellen.* *...aus Punkten des Funktionsgraphen die Gleichung einer quadratischen Funktion ermitteln.* *...inner- und außermathematische Problemstellungen mit Hilfe quadratischer Funktionen ermitteln.* *...CAS verwenden um experimentell zu arbeiten und verschiedene Lösungswege zu realisieren und zu vergleichen.*

Mathematische Leitideen	*Funktionaler Zusammenhang* *Zahl*

Vorschlag zur Zuordnung der Mathematischen Kompetenzen

Aufgabe	Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	Mathematisch Kommunizieren
A1				x	x	
A2		x	x	x	x	
A3				x	x	
A4	x					x
A5	x	x	x		x	x
W1	x	x	x			x

Referenzen

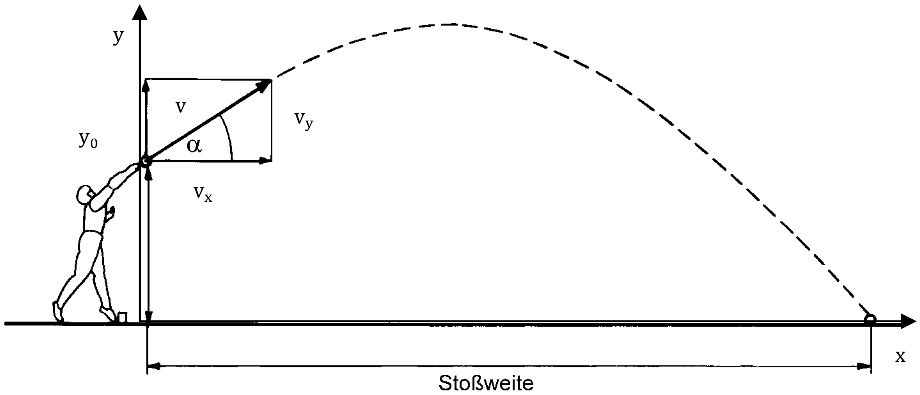
http://www.leichtathletik.de/dokumente/proforumrot/thread.asp?id=4654 24.11.2012

N1 Wann ist weniger mehr? – Der optimale Winkel beim Kugelstoßen.

Beim Kugelstoßen entspricht die Flugbahn der Kugel einer Parabel. Daher kann die Flugkurve mit der folgenden Gleichung beschrieben werden.

$$y = -\frac{g}{2v_x^2} \cdot x^2 + \frac{v_y}{v_x} \cdot x + y_0$$

Alle Größen finden sich in folgender Skizze wieder.



Legende:

g ... Fallbeschleunigung $\left(g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right)$

v ... Abwurfgeschwindigkeit

v_x ... Abwurfgeschwindigkeit in x − Richtung

v_y ... Abwurfgeschwindigkeit in y − Richtung

y_0 ... Abwurfhöhe

α ... Abwurfwinkel

Der Kugelstoßer David Storl wurde 2011 in Dagegu (Südkorea) als erster Deutscher Weltmeister im Kugelstoßen mit einer Weite von 21,78 m. Nun bereit er sich auf die nächsten Olympischen Spiele vor. Bei einem seiner Trainingsstöße wurden mit Hilfe einer Videokamera und einer normierten Leinwand folgende Werte gemessen:

Abwurfhöhe: $y_0 = 2{,}24$ m

Abwurfgeschwindigkeit: $v = 14{,}19\ \frac{m}{s}$

Abwurfgeschwindigkeit in x-Richtung: $v_x = 11{,}55\frac{m}{s}$

Die Weite wurde bei der Videoanalyse nicht erfasst. Der Trainer hat aber das Gefühl, dass David seine persönliche Bestweite übertroffen haben könnte.

☹	😐	☺

A1 Bestimme die Weite und die Höhe von Davids Trainingsstoß.

Der Trainer trainiert zurzeit auch einen Nachwuchssportler. Bei einem Trainingsstoß seines Schützlings misst der Trainer eine Stoßweite von 18,17 m. Da er immer auch ein Foto macht, kann er ermitteln, dass die Kugel nach 7,86 m ihren höchsten Punkt bei einer Höhe von 6,21 m erreicht hatte. Weiterhin kann er die Abstoßhöhe mit $y_0 = 2{,}08$ m rekonstuieren.

A2 **Bestimme eine Parabelgleichung, die den Stoß des Nachwuchssportlers beschreibt.**

Zu Auswertungszwecken legt der Trainer die beiden Flugkurven übereinander.

A3 **Bestimme die Punkte, an denen sich die beiden Flugkurven schneiden.**

Der Trainer betrachtet sich die beiden Flugkurven, um dem Nachwuchssportler einige Hinweise geben zu können. Er kann davon ausgehen, dass beide Athleten mit der gleichen Kraft gestoßen hatten, da die Abwurfgeschwindigkeiten nach seinen Erkenntnissen ungefähr gleich sind.

A4 **Sprich eine Empfehlung für den Nachwuchssportler aus, nachdem du die beiden Flugkurven verglichen hast. Begründe deine Empfehlung.**

Wenn sich Abwurf- und Landepunkt auf derselben Höhe befinden, dann ist aus der Physik bekannt, dass der optimale Abwurfwinkel $\alpha = 45^0$ ist. Ist das beim Kugelstoßen auch so? Verwende als Grundlage deiner Untersuchungen, die Flugkurve von Davids Trainingsstoß aus Aufgabe A1.

A5 **Stelle eine Vermutung für den optimalen Abwurfwinkel beim Kugelstoßen auf. Begründe deine Vermutung.**

Zusatz:

Auch beim Hammerwurf kann man die Flugbahn des Hammers sehr gut mit einer Parabel beschreiben. Allerdings liegen die Wurfweiten der besten Athleten bei ungefähr 85 m.

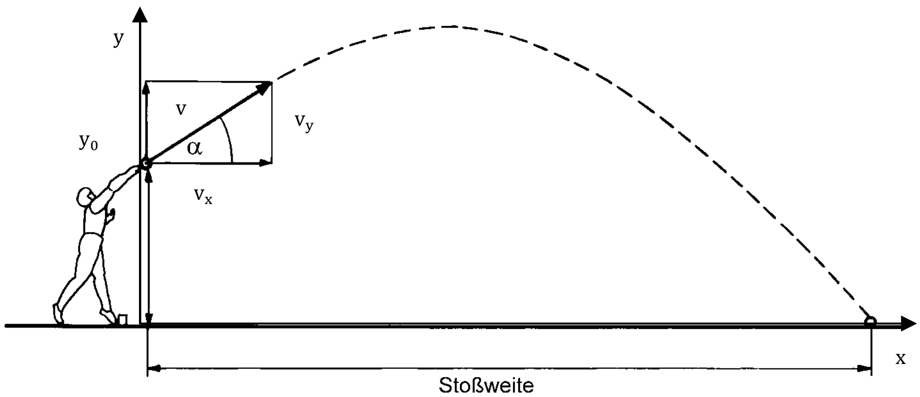
W1 **Vergleiche die generellen Flugkurven der Geräte in den beiden Disziplinen Hammerwurf und Kugelstoß. Gehe dabei auch auf den Abwurfwinkel beim Hammerwurf ein.**

N2 Wann ist weniger mehr? – Der optimale Winkel beim Kugelstoßen.

Beim Kugelstoßen entspricht die Flugbahn der Kugel einer Parabel. Daher kann die Flugkurve mit der folgenden Gleichung beschrieben werden.

$$y = -\frac{g}{2v_x^2} \cdot x^2 + \frac{v_y}{v_x} \cdot x + y_0$$

Alle Größen finden sich in folgender Skizze wieder.



Legende: g … Fallbeschleunigung $\left(g = 9{,}81 \ \frac{m}{s^2}\right)$

v … Abwurfgeschwindigkeit

v_x … Abwurfgeschwindigkeit in x − Richtung

v_y … Abwurfgeschwindigkeit in y − Richtung

y_0 … Abwurfhöhe

α … Abwurfwinkel

Der Kugelstoßer David Storl wurde 2011 in Dagegu (Südkorea) als erster Deutscher Weltmeister im Kugelstoßen mit einer Weite von 21,78 m. Nun bereit er sich auf die nächsten Olympischen Spiele vor. Bei einem seiner Trainingsstöße wurden mit Hilfe einer Videokamera und einer normierten Leinwand folgende Werte gemessen:

Abwurfhöhe: $y_0 = 2{,}24$ m

Abwurfgeschwindigkeiten in x- und y-Richtung: $v_y = 8{,}24 \frac{m}{s}$, $v_x = 11{,}55 \frac{m}{s}$

Die Weite wurde bei der Videoanalyse nicht erfasst. Der Trainer hat aber das Gefühl, dass David seine persönliche Bestweite übertroffen haben könnte.

☹	😐	☺

A1 Bestimme die Weite und die Höhe von Davids Trainingsstoß.

Der Trainer trainiert zurzeit auch einen Nachwuchssportler. Bei einem Trainingsstoß seines Schützlings misst der Trainer eine Stoßweite von 18,17 m. Da er immer auch ein Foto macht, kann er ermitteln, dass die Kugel nach 7,86 m ihren höchsten Punkt bei einer Höhe von 6,21 m erreicht hatte. Weiterhin kann er die Abstoßhöhe mit $y_0 = 2{,}08$ m rekonstuieren.

A2 Bestimme eine Parabelgleichung, die den Stoß des Nachwuchssportlers beschreibt.

Zu Auswertungszwecken legt der Trainer die beiden Flugkurven übereinander.

A3 Bestimme die Punkte, an denen sich die beiden Flugkurven schneiden.

Der Trainer betrachtet sich die beiden Flugkurven, um dem Nachwuchssportler einige Hinweise geben zu können. Er kann davon ausgehen, dass beide Athleten mit der gleichen Kraft gestoßen hatten, da die Abwurfgeschwindigkeiten nach seinen Erkenntnissen ungefähr gleich sind.

A4 Sprich eine Empfehlung für den Nachwuchssportler aus, nachdem du die beiden Flugkurven verglichen hast. Begründe deine Empfehlung.

Wenn sich Abwurf- und Landepunkt auf derselben Höhe befinden, dann ist aus der Physik bekannt, dass der optimale Abwurfwinkel $\alpha = 45^0$ ist. Ist das beim Kugelstoßen auch so? Verwende als Grundlage deiner Untersuchungen, die Flugkurve von Davids Trainingsstoß aus Aufgabe A1.

A5 Stelle eine Vermutung für den optimalen Abwurfwinkel beim Kugelstoßen auf. Begründe deine Vermutung

Hinweis:

Verwende bei deinen Überlegungen die Flugparabelgleichung in Abhängigkeit des Abwurfwinkels:

$$y_\alpha(x) = \frac{-g}{2 \cdot v \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + y_0 \qquad \text{mit } v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

Zusatz:

Auch beim Hammerwurf kann man die Flugbahn des Hammers sehr gut mit einer Parabel beschreiben. Allerdings liegen die Wurfweiten der besten Athleten bei ungefähr 85 m.

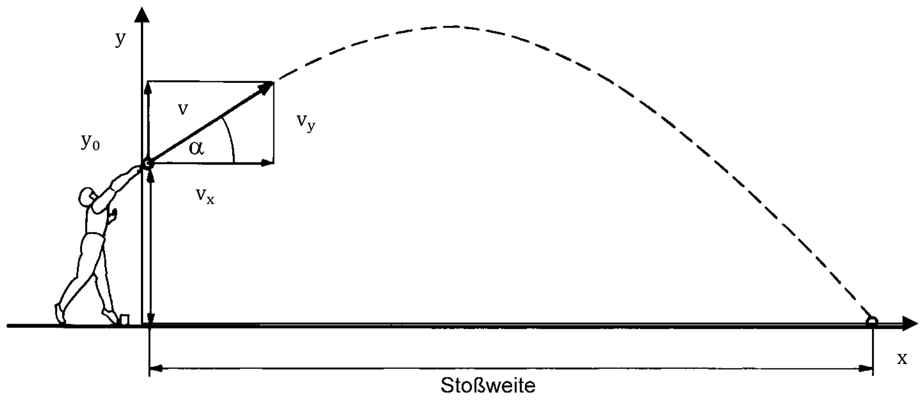
W1 Vergleiche die generellen Flugkurven der Geräte in den beiden Disziplinen Hammerwurf und Kugelstoß. Gehe dabei auch auf den Abwurfwinkel beim Hammerwurf ein.

N3 Wann ist weniger mehr? – Der optimale Winkel beim Kugelstoßen.

Beim Kugelstoßen entspricht die Flugbahn der Kugel einer Parabel. Daher kann die Flugkurve mit der folgenden Gleichung beschrieben werden.

$$y = -\frac{g}{2v_x^2} \cdot x^2 + \frac{v_y}{v_x} \cdot x + y_0$$

Alle Größen finden sich in folgender Skizze wieder.



Legende: g … Fallbeschleunigung $\left(g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right)$

v … Abwurfgeschwindigkeit

v_x … Abwurfgeschwindigkeit in $x-$Richtung

v_y … Abwurfgeschwindigkeit in $y-$Richtung

y_0 … Abwurfhöhe

α … Abwurfwinkel

Der Kugelstoßer David Storl wurde 2011 in Dagegu (Südkorea) als erster Deutscher Weltmeister im Kugelstoßen mit einer Weite von 21,78 m. Nun bereit er sich auf die nächsten Olympischen Spiele vor. Bei einem seiner Trainingsstöße wurden mit Hilfe einer Videokamera und einer normierten Leinwand die entsprechenden Werte gemessen und die Flugparabelgeleichung aufgestellt:

$$y = -0{,}0368 \cdot x^2 + 0{,}7134 \cdot x + 2{,}24$$

Die Weite wurde bei der Videoanalyse nicht erfasst. Der Trainer hat aber das Gefühl, dass David seine persönliche Bestweite übertroffen haben könnte.

☹	😐	☺

A1 Bestimme die Weite und die Höhe von Davids Trainingsstoß.

Der Trainer trainiert zurzeit auch einen Nachwuchssportler. Bei einem Trainingsstoß seines Schützlings misst der Trainer eine Stoßweite von 18,17 m. Da er immer auch ein Foto macht, kann er ermitteln, dass die Kugel nach 7,86 m ihren höchsten Punkt bei einer Höhe von 6,21 m erreicht hatte. Weiterhin kann er die Abstoßhöhe mit $y_0 = 2{,}08$ m rekonstuieren.

A2	**Bestimme eine Parabelgleichung, die den Stoß des Nachwuchssportlers beschreibt.**	

Zu Auswertungszwecken legt der Trainer die beiden Flugkurven übereinander.

A3	**Bestimme die Punkte, an denen sich die beiden Flugkurven schneiden.**	

Der Trainer betrachtet sich die beiden Flugkurven, um dem Nachwuchssportler einige Hinweise geben zu können. Er kann davon ausgehen, dass beide Athleten mit der gleichen Kraft gestoßen hatten, da die Abwurfgeschwindigkeiten nach seinen Erkenntnissen ungefähr gleich sind.

A4	**Sprich eine Empfehlung für den Nachwuchssportler aus, nachdem du die beiden Flugkurven verglichen hast. Begründe deine Empfehlung.**	

Wenn sich Abwurf- und Landepunkt auf derselben Höhe befinden, dann ist aus der Physik bekannt, dass der optimale Abwurfwinkel $\alpha = 45^0$ ist. Ist das beim Kugelstoßen auch so? Verwende als Grundlage deiner Untersuchungen, die Flugkurve von Davids Trainingsstoß aus Aufgabe A1.

A5	**Stelle eine Vermutung für den optimalen Abwurfwinkel beim Kugelstoßen auf. Begründe deine Vermutung**	

Hinweis:

Verwende bei deinen Überlegungen die Flugparabelgleichung in Abhängigkeit des Abstoßwinkels α:

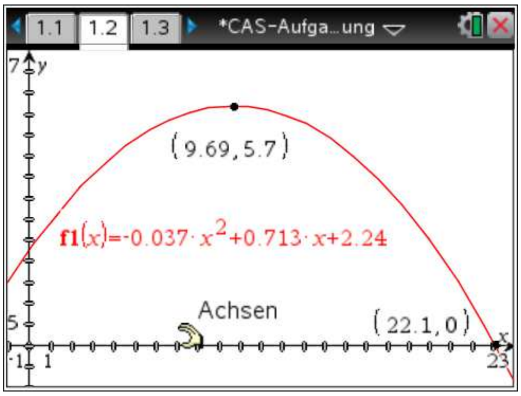
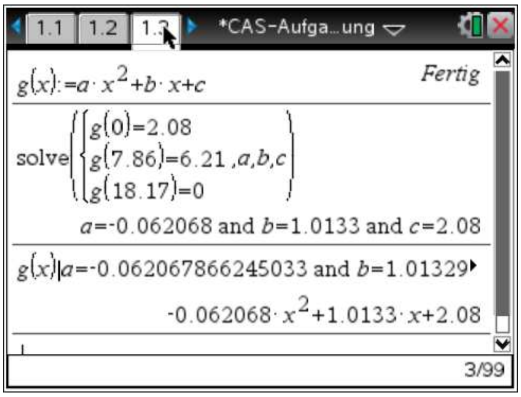
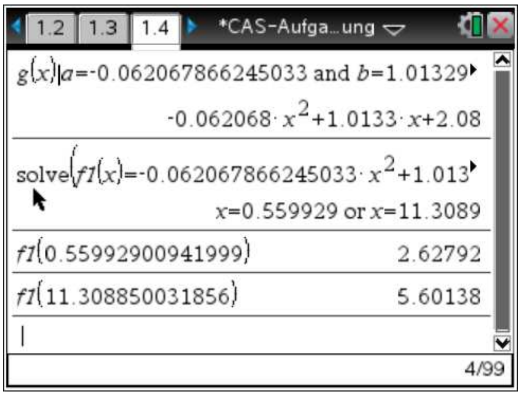
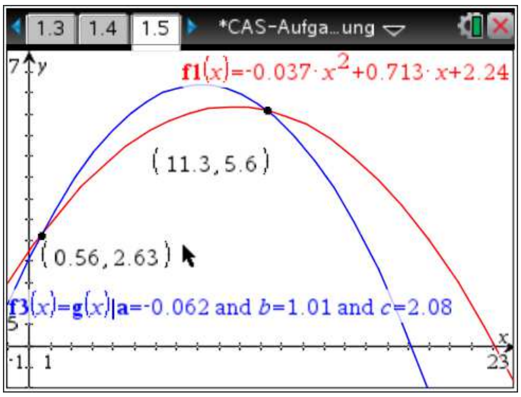
$$y_\alpha(x) = -0{,}02436 \cdot \frac{1}{cos^2(\alpha)} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + 2{,}24$$

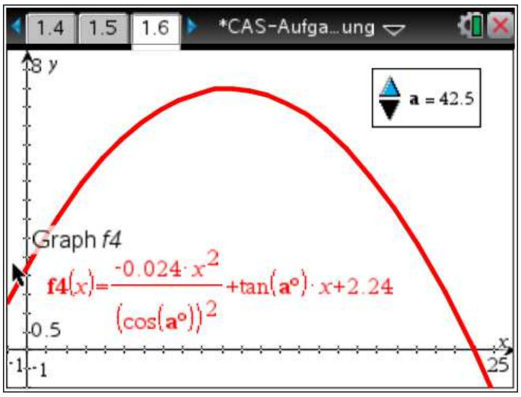
Zusatz:

Auch beim Hammerwurf kann man die Flugbahn des Hammers sehr gut mit einer Parabel beschreiben. Allerdings liegen die Wurfweiten der besten Athleten bei ungefähr 85 m.

W1	**Vergleiche die generellen Flugkurven der Geräte in den beiden Disziplinen Hammerwurf und Kugelstoß. Gehe dabei auch auf den Abwurfwinkel beim Hammerwurf ein.**	

Lösungshinweise zu Aufgabe2:
Wann ist weniger mehr? – Der optimale Winkel beim Kugelstoßen.

Aufgabe	Lösungshinweis	Screenshot (Beispiel)
A1	Es ist zunächst nötig die gegebenen Werte in die allgemeine Wurfparabelgleichung einzusetzen. Innerhalb der Aufgabenstellung von N1 muss auch der pythagoreische Zusammenhang der Geschwindigkeiten in x- bzw. y-Richtung erkannt und angewandt werden. Die Aufgabe kann entweder rechnerisch oder graphisch unter Verwendung digitaler Werkzeuge gelöst werden.	
A2		
A3	Die Aufgabe kann entweder rechnerisch oder graphisch unter Verwendung digitaler Werkzeuge gelöst werden.	
A4	Man könnte dem Nachwuchssportler empfehlen, die Kugel flacher abzustoßen. Vergleicht man beide Flugkurven, erkennt man, dass die Kugel des Nachwuchssportlers zwar höher aber eben nicht weiter als die Kugel von David Storl fliegt. Die Kugel würde demnach weiter fliegen, wenn der Abwurfwinkel verringert wird.	

A5	Legt man die Flugkurve der Kugel von David Storl aus A1 zugrunde, kann man die Stoßweite in Abhängigkeit des Abwurfwinkels untersuchen. Dabei fällt auf, dass der Abwurfwinkel deutlich kleiner als 45° ist. Die Verwendung digitaler Werkzeuge ist an dieser Stelle ungemein hilfreich. Die Begründung für den kleineren Abwurfwinkel liegt in der Relation von Abwurfhöhe und –weite. Da die Kugel nicht so weit fliegt, bewirkt der Abwurfpunkt von ca. 2m über dem Boden einen von 45° abweichenden Abwurfwinkel. Es ist nachvollziehbar, dass der Steigungswinkel einer Tangenten an einer Parabel kleiner wird je näher sie an den Scheitelpunkt angelegt wird.	
W1	Die obige Argumentation greift auch beim Hammerwurf. Allerdings ist die Wurfweite von ca. 85m deutlich größer als beim Kugelstoßen, wobei die Abwurfhöhe annähernd gleich ist. Das bedeutet, der Abwurfwinkel liegt bei 45°, denn der Höhenunterschied zwischen Abwurf- und Landpunkt ist zu gering.	

Aufgabe 3: Salar de Uyuni – Eine geometrische Laune der Natur.

Themengebiet	*Zentrische Streckung, Kreiskegel*

Klassenstufe	*9*

Kurzbeschreibung	*Auf der bolivianischen Hochebene **Salar de Uyuni** befindet sich ein gewaltiger Salzsee. Die Bewohner türmen das Salz zu mannshohen Kegeln auf, bevor es abtransportiert und in die ganze Welt verschickt wird. Diese Szenerie bietet wegen der einzigartigen Natur viele unglaubliche Fotomotive. Diese Bilder zeigen auch interessante geometrische Zusammenhänge.* *Für diese Aufgabe liegt ein digitales Arbeitsblatt bereit:* *http://www.mz.jena.de/moodle/mod/folder/view.php?id=38778*

Lehrplanbezüge	*...den Einfluss des Streckfaktors auf die Größen von Winkeln, die Länge von Strecken, den Flächeninhalt bzw. den Rauminhalt beschreiben.* *...zentrische Streckung und Ähnlichkeit mit dynamischer Geometriesoftware veranschaulichen.* *...aus maßstabsgerechten Zeichnungen und Skizzen von zusammengesetzten Körpern Maße sachgerecht entnehmen und für Berechnungen nutzen.*

Mathematische Leitideen	*Raum und Form* *Messen* *Zahl*

Vorschlag zur Zuordnung der Mathematischen Kompetenzen

Aufgabe	Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	Mathematisch Kommunizieren
A1.1		x		x		
A1.2					x	
A2.1			x	x		x
A2.2				x	x	x
A3.1	x	x		x		
A3.2	x	x		x		

N1 Salar de Uyuni – Eine geometrische Laune der Natur.

Im Internet findet man zu dem Suchwort *Salar de Uyuni* unter anderem folgende Informationen:

> Mit einer Fläche von 10.000 Quadratkilometern bildet der *Salar de Uyuni* den größten Salzsee auf der Welt. Er ist eine Attraktion für Bolivien-Touristen, die mit Geländewagen über die mondähnliche Senke fahren, vorbei an tausend Jahre alten Kakteen und Flamingos in Salzlagunen.
>
> Hier, in 3650 Metern Höhe, gehen Salzbauern einer beschwerlichen Arbeit nach. Sie hacken mit Pickeln und Äxten Salz aus der meterdicken Kruste und türmen es zu Kegeln auf. Das Salz soll in der Sonne trocknen, ehe es auf die Pritschen klappriger Lastwagen geschaufelt und in die Stadt *Uyuni* gebracht wird, um von dort in die ganze Welt transportiert zu werden. […]
>
> http://www.hamburggoesgreen.de/links/20-news2 27.10.2011

http://www.worldtravelattractions.com/top-5-alien-landscapes-on-earth/ 04.04.2012

		☹	😐	☺
A1.1	**In dem obigen Bild sind die beschriebenen Salzkegel zu sehen. Schätze die Höhe und die Breite und bestimme das Gewicht eines solchen Salzkegels. Gehe dabei kurz auf die Konsequenzen für den Salztransport ein.**			
A1.2	**Der durchschnittliche Prokopfverbrauch in Thüringen liegt bei 4380g Salz im Jahr. Bestimme die Anzahl an Personen, die mit der von dir berechneten Menge für ein Jahr versorgt werden könnten.**			
A2.1	**Auf dem Bild kann man mehrere zentrische Streckungen erkennen. Zeichne eine zentrische Streckung in das Bild ein. Beschreibe wo das Streckzentrum liegt und bestimme den entsprechenden Streckungsfaktor.**			
A2.2	**Der Maßstab des Bildes beträgt 1:38. Berechne die tatsächliche Höhe und die Breite des Kegels und vergleiche diese Werte mit deinen Schätzwerten.**			
A3.1	**Angenommen man würde einen Kegel ähnlich wie in der Abbildung um den Streckungsfaktor 3 zentrisch strecken. Zeige, dass dann das Volumen des gestreckten Kegels das 27-fache Volumen des Ausgangskegels umfasst.**			
A3.2	**Verallgemeinere diesen Zusammenhang für einen positiven Streckungsfaktor $k > 0$.**			

N2 Salar de Uyuni – Eine geometrische Laune der Natur.

Im Internet findet man zu dem Suchwort *Salar de Uyuni* unter anderem folgende Informationen:

> Mit einer Fläche von 10.000 Quadratkilometern bildet der *Salar de Uyuni* den größten Salzsee auf der Welt. Er ist eine Attraktion für Bolivien-Touristen, die mit Geländewagen über die mondähnliche Senke fahren, vorbei an tausend Jahre alten Kakteen und Flamingos in Salzlagunen.
>
> Hier, in 3650 Metern Höhe, gehen Salzbauern einer beschwerlichen Arbeit nach. Sie hacken mit Pickeln und Äxten Salz aus der meterdicken Kruste und türmen es zu Kegeln auf. Das Salz soll in der Sonne trocknen, ehe es auf die Pritschen klappriger Lastwagen geschaufelt und in die Stadt *Uyuni* gebracht wird, um von dort in die ganze Welt transportiert zu werden. […]
>
> http://www.hamburggoesgreen.de/links/20-news2 27.10.2011

http://www.worldtravelattractions.com/top-5-alien-landscapes-on-earth/ 04.04.2012

		☹	😐	☺
A1.1	**In dem obigen Bild sind die beschriebenen Salzkegel zu sehen. Schätze die Höhe und die Breite eines solchen Kegels. Bestimme anhand deiner Schätzwerte das Gewicht eines solchen Salzkegels. (Die Dichte von Kochsalz beträgt 2,17$\frac{g}{cm^3}$.) Gehe dabei kurz auf die Konsequenzen für den Salztransport ein.**			
A1.2	**Der durchschnittliche Prokopfverbrauch in Thüringen liegt bei 4380g Salz im Jahr. Bestimme die Anzahl an Personen, die mit der von dir berechneten Menge für ein Jahr versorgt werden könnten.**			
A2.1	**Auf dem Bild kann man mehrere zentrische Streckungen erkennen. Zeichne eine zentrische Streckung in das Bild ein. Beschreibe wo das Streckzentrum liegt und bestimme den entsprechenden Streckungsfaktor.**			
A2.2	**Der Maßstab des Bildes beträgt 1:38. Berechne die tatsächliche Höhe und die Breite des Kegels und vergleiche diese Werte mit deinen Schätzwerten.**			
A3	**Angenommen man würde einen Kegel ähnlich wie in der Abbildung um den Streckungsfaktor 3 zentrisch strecken. Zeige, dass dann das Volumen des gestreckten Kegels das 27-fache Volumen des Ausgangskegels umfasst.**			

N3 Salar de Uyuni – Eine geometrische Laune der Natur.

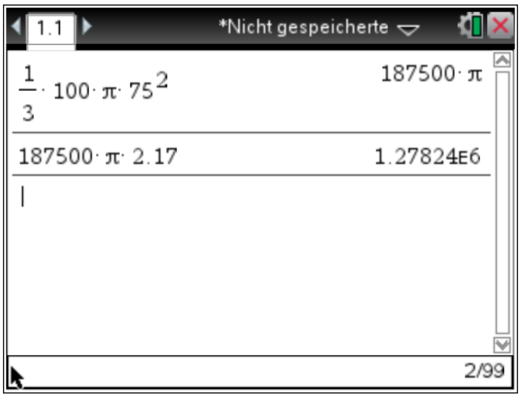
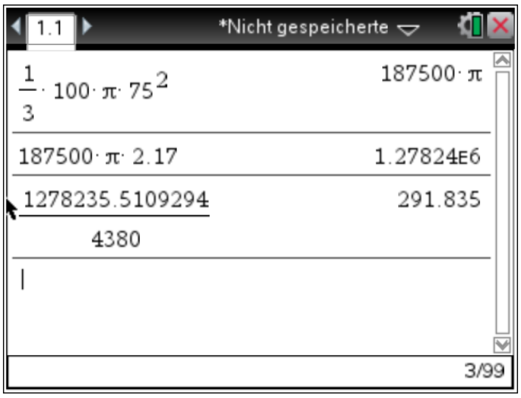
Im Internet findet man zu dem Suchwort *Salar de Uyuni* unter anderem folgende Informationen:

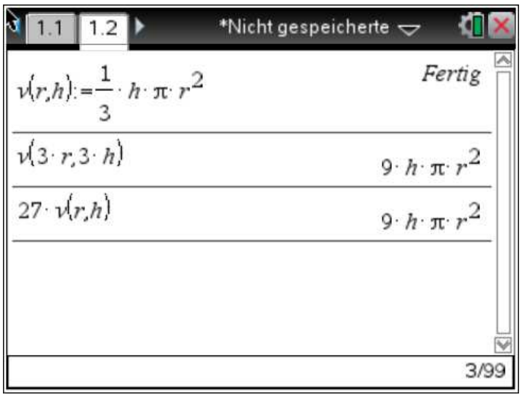
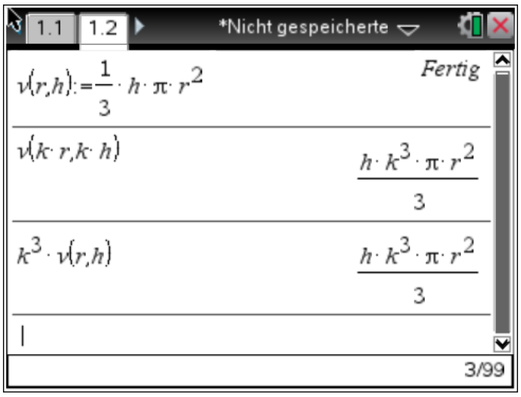
> Mit einer Fläche von 10.000 Quadratkilometern bildet der *Salar de Uyuni* den größten Salzsee auf der Welt. Er ist eine Attraktion für Bolivien-Touristen, die mit Geländewagen über die mondähnliche Senke fahren, vorbei an tausend Jahre alten Kakteen und Flamingos in Salzlagunen.
>
> Hier, in 3650 Metern Höhe, gehen Salzbauern einer beschwerlichen Arbeit nach. Sie hacken mit Pickeln und Äxten Salz aus der meterdicken Kruste und türmen es zu Kegeln auf. Das Salz soll in der Sonne trocknen, ehe es auf die Pritschen klappriger Lastwagen geschaufelt und in die Stadt *Uyuni* gebracht wird, um von dort in die ganze Welt transportiert zu werden. […]
>
> http://www.hamburggoesgreen.de/links/20-news2 27.10.2011

http://www.worldtravelattractions.com/top-5-alien-landscapes-on-earth/ 04.04.2012

		☹	😐	☺
A1	**In dem obigen Bild sind die beschriebenen Salzkegel zu sehen. Schätze die Höhe und die Breite eines solchen Kegels. Bestimme anhand deiner Schätzwerte das Gewicht eines solchen Salzkegels. (Die Dichte von Kochsalz beträgt 2,17$\frac{g}{cm^3}$.) Gehe dabei kurz auf die Konsequenzen für den Salztransport ein.**			
A2.1	**Auf dem Bild kann man mehrere zentrische Streckungen erkennen. Zeichne eine zentrische Streckung in das Bild ein. Beschreibe wo das Streckzentrum liegt und bestimme den entsprechenden Streckungsfaktor.**			
A2.2	**Der Maßstab des Bildes beträgt 1:38. Berechne die tatsächliche Höhe und die Breite des Kegels und vergleiche diese Werte mit deinen Schätzwerten.**			
A3	**Angenommen man würde einen Kegel ähnlich wie in der Abbildung um den Streckungsfaktor 3 zentrisch strecken. Zeige, dass dann das Volumen des gestreckten Kegels das 27-fache Volumen des Ausgangskegels umfasst.**			

Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Salar de Uyuni – Eine geometrische Laune der Natur.

Aufgabe	Lösungshinweis	Screenshot (Beispiel)
A1.1	In dem Text wird der Hinweis geben, dass ein bolivianischer Salzbauer einen solchen Salzkegel mit Handwerkzeugen (Hacke, Spaten) auftürmen kann. Man kann daher vermuten, dass solche Salzkegel 1m hoch und vielleicht 1,5m breit sind. Ein Salzkegel wiegt demnach 1,3 Tonnen. Es ist beachtlich, wie schwer Salz eigentlich ist. Es ist anzunehmen, dass man z.B. den Laderaum eines LKWs nicht vollständig mit Salz auffüllen kann, das wäre einfach zu schwer. Das bedeutet, man benötigt eine Vielzahl an LKWs für den Abtransport des Salzes.	
A1.2	Mit 1,3 Tonnen Salz könnten 291 Menschen für ein Jahr versorgt werden. Man könnte auch sagen, dass ein Vier-Personen-Haushalt mit dieser Menge an Salz 73 Jahre auskommen könnte.	
A2.1	Das Streckzentrum ist in jedem Fall am Horizont auszumachen. Wahlweise kann man auf die Beziehung zum Fluchtpunkt eingehen. Der Streckungsfaktor liegt bei dem linken Beispiel bei 2,16.	
A2.2	Bei dieser Aufgabe kann man es sich leicht machen, wenn man nur ungefähr die Höhe des Kegels misst. Man kann aber auch genauer arbeiten, in dem man die Seitenkante und die Breite des Kegels misst und daraus einen exakteren Wert für die Höhe bestimmt. Die Kegel sind in Natur tatsächlich ungefähr 1m hoch und 1,5m breit.	

A3.1	Der Nachweis kann z.B. so erfolgen: $V' = \frac{1}{3} \cdot h' \cdot \pi \cdot r'^2 = \frac{1}{3} \cdot (3h) \cdot \pi \cdot (3r)^2$ $= 27 \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi \cdot r^2 = 27 \cdot V$	
A3.2	Der Nachweis für ein allgemeines k>0 erfolgt analog zu A3.1. Ein CAS kann an dieser Stelle ein nützliches Hilfsmittel der Kontrolle bzw. des Probierens sein. $V' = \frac{1}{3} \cdot h' \cdot \pi \cdot r'^2 = \frac{1}{3} \cdot (k \cdot h) \cdot \pi \cdot (k \cdot r)^2$ $= k^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi \cdot r^2 = k^3 \cdot V$	

Aufgabe 4: So alt und doch lösbar!

Themengebiet	*Volumen zusammengesetzter Körper*

Klassenstufe	*9*

Kurzbeschreibung	*Die verschiedenen Formen der antiken Amphoren beschäftigen die Historiker und Antikenforscher seit jeher. Die Größen und Formen variierten über die Zeit und die Kulturen stark. Daher ist es immer wieder spannend, eine neue Form solcher antiker Tongefäße zu entdecken.* *Dass es Tabellen mit Inhaltsangaben gab, ist überliefert. Vielleicht hat es wirklich schon einmal einen Archäologen gegeben, der die Form des Gefäßes anhand einer solchen Tabelle bestimmt hat.* *Die Volumen der antiken Amphoren schwankten zwischen 5 bis 50 l. In diesem Beispiel liegt das Innenvolumen des Gefäßes bei ca. 25 l. Interessanterweise beinhaltete die römische Standard-Amphore 26 l.*

Lehrplanbezüge	*...Oberflächeninhalt und Volumen von zusammengesetzten Körpern berechnen.* *...die Lösungsstrategien bei geometrischen Konstruktionen und Berechnungen anwenden: Zerlegen eines Problems in Teilprobleme, Erkennen von speziellen Linien, Dreiecken und Vielecken in Körpern, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten.* *...Lösungswege und Ergebnisse verständlich und in angemessener Form präsentieren, erläutern und reflektieren.*

Mathematische Leitideen	*Raum und Form* *Zahl* *Funktionaler Zusammenhang*

Vorschlag zur Zuordnung der Mathematischen Kompetenzen

Aufgabe	Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	Mathematisch Kommunizieren
A1	x	x	x	x	x	

Referenzen

GREEFRATH, G. (2007): Mathematisch Modellieren lernen – ein Beispiel aus der Integralrechnung. In: GREEFRATH, G.; MAAß, J. (Hrsg.): Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe. Materialien für einen realitätsbezogenen Unterricht. Verlag Franzbecker Hildesheim, Berlin. S. 113.

DILKE, A. O. W. (1991): Mathematik, Maße und Gewichte in der Antike. Reclam Stuttgart.

N1 So alt und doch lösbar!

Bei Ausgrabungen in der Nähe von Delphi (Griechenland) sind Archäologen auf Überreste einer antiken Siedlung gestoßen. Dabei haben sie auch Lagerräume frei gelegt, in denen große Tongefäße gestanden haben müssen, dass legen die Scherbenfunde nahe. Leider konnten nur sehr wenige dieser Scherben geborgen werden. Allerdings konnten die Forscher eine Tontafel mit Angaben zu Füllständen und Füllmengen der Behältnisse retten. Auf der Tafel konnten sie die folgende Tabelle finden:

Füllstand	Füllmenge
$\frac{1}{4}$ pous	30 kyathos
$\frac{1}{2}$ pous	70 kyathos
$\frac{3}{4}$ pous	120 kyathos
1 pous	185 kyathos
$\frac{5}{4}$ pous	265 kyathos
$\frac{3}{2}$ pous	360 kyathos
2 pous	500 kyathos

pous (Fuß) … altgriechische Längeneinheit

kyathos(Schöpfbecher) … altgriechische Volumeneinheit

Die Archäologen erkennen sofort, dass so eine Tabelle sehr nützlich war, denn die Bewohner der Siedlung mussten nur messen welchen Füllstand die Behältnisse hatten und konnten dann sofort auf die Füllmenge schließen.

Auf der Tontafel finden die Forscher auch die Angaben zu den Regalen, in denen die Behältnisse gelagert wurden. Demnach standen immer fünf Gefäße in einer Reihe nebeneinander und das Regal war 5 pous breit. Außerdem gab es jeweils 5 Standmulden mit einem Durchmesser von einem halben pous.

Die Archäologen fragen sich, wie ein solches Gefäß wohl ausgesehen haben mag.

☹	😐	☺

A1 Finde unterschiedliche Gefäßformen und vergleiche die Volumen mit der obigen Tabelle. Entscheide auf Grundlage deiner Berechnungen welche Form dem antiken Gefäß am ähnlichsten ist.

<u>Hinweis:</u>

Die Forscher wissen, dass ein griechischer Fuß (pous) 296 mm misst und ein griechischer Schöpfbecher (kyathos) 0,05 l sind. Es ist weiterhin bekannt, dass die Menschen in der Antike die Näherung von $\frac{22}{7}$ für π verwendet haben.

N2 So alt und doch lösbar!

Bei Ausgrabungen in der Nähe von Delphi (Griechenland) sind Archäologen auf Überreste einer antiken Siedlung gestoßen. Dabei haben sie auch Lagerräume frei gelegt, in denen große Tongefäße gestanden haben müssen, dass legen die Scherbenfunde nahe. Leider konnten nur sehr wenige dieser Scherben geborgen werden. Allerdings konnten die Forscher eine Tontafel mit Angaben zu Füllständen und Füllmengen der Behältnisse retten. Auf der Tafel konnten sie die folgende Tabelle finden:

Füllstand	Füllmenge
$\frac{1}{4}$ pous	0,06 pous^3
$\frac{1}{2}$ pous	0,13 pous^3
$\frac{3}{4}$ pous	0,23 pous^3
1 pous	0,36 pous^3
$\frac{5}{4}$ pous	0,51 pous^3
$\frac{3}{2}$ pous	0,69 pous^3
2 pous	0,95 pous^3

pous (Fuß) … altgriechische Längeneinheit

pous^3 (Kubikfuß) … konstruierte Volumeneinheit

Die Archäologen erkennen sofort, dass so eine Tabelle sehr nützlich war, denn die Bewohner der Siedlung mussten nur messen welchen Füllstand die Behältnisse hatten und konnten dann sofort auf die Füllmenge schließen.

Auf der Tontafel finden die Forscher auch die Angaben zu den Regalen, in denen die Behältnisse gelagert wurden. Demnach standen immer fünf Gefäße in einer Reihe nebeneinander und das Regal war 5 pous breit. Außerdem gab es jeweils 5 Standmulden mit einem Durchmesser von einem halben pous.

Die Archäologen fragen sich, wie ein solches Gefäß wohl ausgesehen haben mag.

☹	😐	☺

A1 Finde unterschiedliche Gefäßformen und vergleiche die Volumen mit der obigen Tabelle. Entscheide auf Grundlage deiner Berechnungen welche Form dem antiken Gefäß am ähnlichsten ist.

Hinweis:

Die Forscher wissen, dass ein griechischer Fuß (pous) 296 mm misst und ein griechischer „Kubikfuß“ (pous^3) ungefähr 26 l entspricht.

Hinweis:

Rechne in der griechischen Einheit pous (Fuß).

N3 So alt und doch lösbar!

Bei Ausgrabungen in der Nähe von Delphi (Griechenland) sind Archäologen auf Überreste einer antiken Siedlung gestoßen. Dabei haben sie auch Lagerräume frei gelegt, in denen große Tongefäße gestanden haben müssen, dass legen die Scherbenfunde nahe. Leider konnten nur sehr wenige dieser Scherben geborgen werden. Allerdings konnten die Forscher eine Tontafel mit Angaben zu Füllständen und Füllmengen der Behältnisse retten. Auf der Tafel konnten sie die folgende Tabelle finden:

Füllstand	Füllmenge
$\frac{1}{4}$ pous	1,5 l
$\frac{1}{2}$ pous	3,5 l
$\frac{3}{4}$ pous	6 l
1 pous	9 l
$\frac{5}{4}$ pous	13 l
$\frac{3}{2}$ pous	18 l
2 pous	25 l

pous (Fuß) … altgriechische Längeneinheit

Die Archäologen erkennen sofort, dass so eine Tabelle sehr nützlich war, denn die Bewohner der Siedlung mussten nur messen welchen Füllstand die Behältnisse hatten und konnten dann sofort auf die Füllmenge schließen.

Auf der Tontafel finden die Forscher auch die Angaben zu den Regalen, in denen die Behältnisse gelagert wurden. Demnach standen immer fünf Gefäße in einer Reihe nebeneinander und das Regal war 5 pous breit. Außerdem gab es jeweils 5 Standmulden mit einem Durchmesser von einem halben pous.

Die Archäologen fragen sich, wie ein solches Gefäß wohl ausgesehen haben mag.

☹	😐	☺

A1 Finde unterschiedliche Gefäßformen und vergleiche die Volumen mit der obigen Tabelle. Entscheide auf Grundlage deiner Berechnungen welche Form dem antiken Gefäß am ähnlichsten ist.

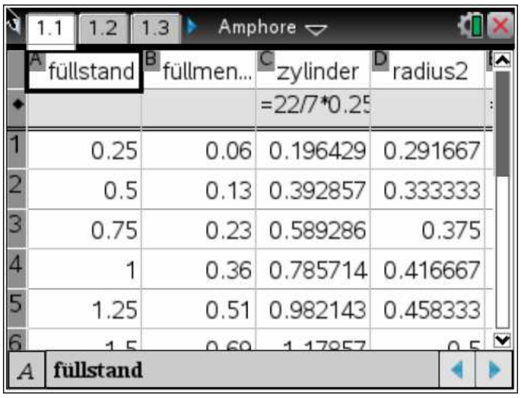
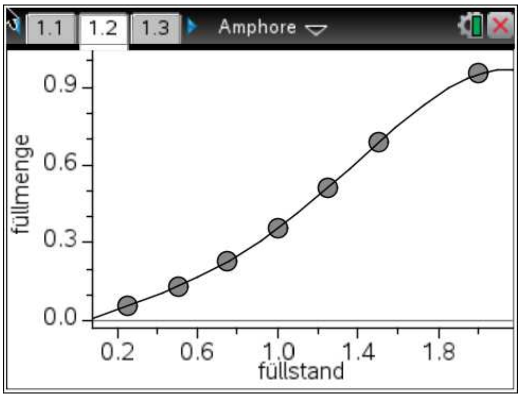
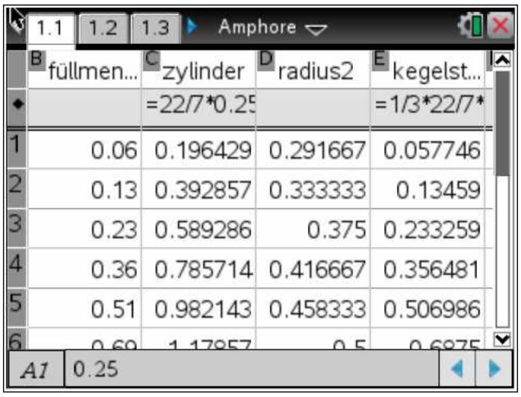
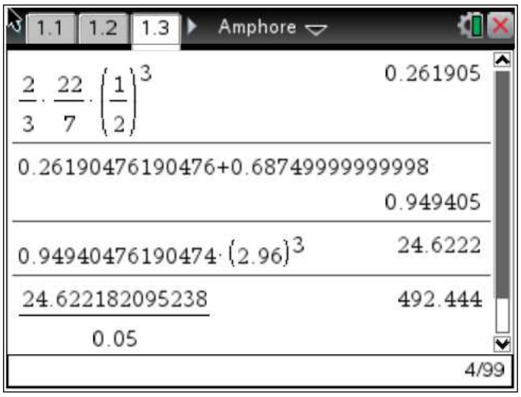
Hinweis:

Die Forscher wissen, dass ein griechischer Fuß (pous) 296 mm misst. Es ist aber vielleicht für den Anfang günstiger in pous (Fuß) zu rechnen.

Hinweis:

Verwende die Volumenformeln von den Körpern, die du kennst und bestimme die dazu gehörigen Tabellen für Höhe und Volumen. Vielleicht kannst du auch einen zusammengesetzten Körper ausprobieren.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4: So alt und doch lösbar!

Aufgabe	Lösungshinweis	Screenshot (Beispiel)
A1	Bei diesem Lösungsbeispiel wird mit griechischen Kubikfuß (pous^3) gearbeitet, natürlich können die Berechnungen auch in kyathos(Schöpfbecher) oder in Liter erfolgen. Eine Vermutung für die Form des antiken Tongefäßes ist ein Kreiszylinder. Wenn man allerdings für diesen Körper die Tabelle von Füllstand und Füllmenge mit Hilfe einer Tabellenkalkulationssoftware aufstellt, erkennt man, dass das Gefäß eine andere Form gehabt haben muss.	
A1	Ein anderes Vorgehen wäre die graphische Auswertung der gegebenen Tabelle um einen funktionalen Zusammenhang zwischen dem Füllstand und der Füllmenge herzustellen. So erhält man vielleicht die Vermutung, dass das antike Gefäß eher einem Kreiskegelstumpf geähnelt hat.	
A1	Erstellt man mit Hilfe einer Tabellenkalkulationssoftware eine Tabelle für Füllstand und Füllmenge für einen Kegelstumpf, so kann man zumindest für die ersten Wertepaare einige Übereinstimmungen ausmachen. Nur der obere Teil des Tongefäßes scheint eine andere Form zu besitzen.	
A1	Eine weitere Idee wäre eine Halbkugel auf den Kegelstumpf zu setzen. Berechnet man das absolute Volumen dieses Körpers, so erkennt man, dass es ungefähr mit dem Wert in der gegebenen Tabelle übereinstimmt. Damit hat man eine ziemlich gute Näherung für die Gefäßform gefunden. Spannend ist, dass das Volumen einen Kubikfuß umfasst. Tatsächlich war eine römische Standard-Amphore (Einheit) gleich einem römischen Kubikfuß.	

Aufgabe 5: Wildes Outback – Leben in Down Under.

Themengebiet	*Exponentielles Wachstum*

Klassenstufe	*10*

Kurzbeschreibung	*Der australische Kontinent fasziniert durch seine einzigartige und exotische Fauna und Flora. Doch leben in **Down Under** nicht nur einheimische Arten. Die europäischen Einwanderer haben bewusst und unbewusst viele Arten in der australischen Wildnis angesiedelt. Diese Arten fanden einen Lebensraum ohne natürliche Feinde vor und vermehrten sich ungehemmt. Somit wurden sie zu einem zunehmenden Problem für das heimische Ökosystem und in Folge dessen auch zum Problem für die Australier selbst. Die ZDF- Dokumentation „TerraX – Teuflisches Paradies Australien“* vom 26.02.2012 thematisiert diese Problematik.

Lehrplanbezüge	*...charakteristische Eigenschaften für Exponentialfunktionen angeben.* *...die Werkzeuge eines CAS verständig nutzen, um solche Funktionen graphisch, tabellarisch oder durch eine Funktionsgleichung darzustellen und auf Eigenschaften zu untersuchen.* *...Exponentielles Wachstum auf Wachstums und Zerfallsprozesse anwenden, dabei lineares und exponentielles Wachstum unterscheiden und von anderen Wachstumsprozessen abgrenzen.*

Mathematische Leitideen	*Funktionaler Zusammenhang* *Zahl*

Vorschlag zur Zuordnung der Mathematischen Kompetenzen

Aufgabe	Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	Mathematisch Kommunizieren
A1.1			x	x	x	
A1.2	x	x	x			x
A3			x	x	x	x
A4		x	x		x	

N1 Wildes Outback – Leben in Down Under.

Es wird ein Ausschnitt aus der ZDF-Dokumentation „*TerraX – Teuflisches Paradies Australien*“ vom 26.02.2012 gezeigt. Schaue dir den Beitrag aufmerksam an.

Mit den Informationen aus dem Dokumentarfilm und den folgenden Fakten aus dem Internet, kann man ermitteln, wie stark die Kamelpopulation in Australien in den nächsten Jahren wachsen könnte.

> **Kamele** und **Pferde** haben sich bei der Erschließung des Landes verdient gemacht. Nach ihrer Freilassung haben sie sich in freier Wildbahn zügig vermehrt. Mittlerweile ziehen große Herden wilder Pferde (Brumbies) und Kamele durch die Steppen des Landes. Zwischen 1840 und 1907 wurden rund 20.000 Kamele als Arbeitstiere nach Australien importiert. Ergebnissen einer Studie der Nationalparkverwaltung zufolge gibt es heute zwischen 600.000 und 750.000 Kamele in Australien. Es wird eine Verdopplung des Bestandes alle acht Jahre vorhergesagt. Kamele werden wegen der Überweidung und Verschmutzung von Wasserlöchern als schädlich für das sensible australische Ökosystem betrachtet.
>
> http://www.australien-panorama.de/fakten/ausfauna_probleme.html 04.04.2012

A1.1 **Bestimme auf Grundlage der Schätzwerte die voraussichtliche Anzahl von Kamelen, die mindestens bzw. höchstens in den Jahren 2036, 2052 und 2060 in Australien leben werden.**

A1.2 **Stelle eine Vermutung über die Größe der voraussichtlichen Kamelpopulation in Australien für die Jahre 2051 und 2069 auf und begründe diese.**

A2 **Stelle den Sachverhalt graphisch dar und diskutiere das verwendete mathematische Modell.**

☹	😐	☺

In der Dokumentation wurde auch gesagt, dass nur 24 Kaninchen in Australien eingeführt wurden und heutzutage leben Milliarden von Kaninchen auf dem Kontinent.

A3 **Bestimme das Jahr, in dem die 24 Kaninchen in Australien ausgesetzt wurden. Gehe dabei auf das verwendete mathematische Modell ein und gib an um wie viel Prozent die Kaninchenpopulation demnach jährlich gewachsen war.**

<u>Hinweis:</u>

> Die weiträumigsten Zerstörungen richtete wahrscheinlich das europäische **Kaninchen** an. […] Thomas Austin brachte 24 Wildkaninchen als Jagdwild nach Australien und setzte sie auf seinem Grundbesitz in der Nähe von Geelong in Victoria aus. Unter den idealen Voraussetzungen der australischen Wildnis, in der nur wenige natürliche Feinde des Kaninchens lebten, vermehrten sich die Tiere unglaublich schnell und wurden bald schon zur Landplage. Im Jahr 1872 zählte man noch 1498 Kaninchen. Im Jahr 1912 schätze man die Anzahl an Kaninchen schon auf knapp 500 Millionen.
>
> http://www.australien-panorama.de/fakten/ausfauna_probleme.html 04.04.2012

N2 Wildes Outback – Leben in Down Under.

Es wird ein Ausschnitt aus der ZDF-Dokumentation „*TerraX – Teuflisches Paradies Australien*“ vom 26.02.2012 gezeigt. Schaue dir den Beitrag aufmerksam an.

Mit den Informationen aus dem Dokumentarfilm und den folgenden Fakten aus dem Internet, kann man ermitteln, wie stark die Kamelpopulation in Australien in den nächsten Jahren wachsen könnte.

> **Kamele** und **Pferde** haben sich bei der Erschließung des Landes verdient gemacht. Nach ihrer Freilassung haben sie sich in freier Wildbahn zügig vermehrt. Mittlerweile ziehen große Herden wilder Pferde (Brumbies) und Kamele durch die Steppen des Landes. Zwischen 1840 und 1907 wurden rund 20.000 Kamele als Arbeitstiere nach Australien importiert. Ergebnissen einer Studie der Nationalparkverwaltung zufolge gibt es heute zwischen 600.000 und 750.000 Kamele in Australien. Es wird eine Verdopplung des Bestandes alle acht Jahre vorhergesagt. Kamele werden wegen der Überweidung und Verschmutzung von Wasserlöchern als schädlich für das sensible australische Ökosystem betrachtet.
>
> http://www.australien-panorama.de/fakten/ausfauna_probleme.html 04.04.2012

☹	😐	☺

A1.1 Bestimme auf Grundlage der Schätzwerte die voraussichtliche Anzahl von Kamelen, die in den Jahren 2036, 2052 und 2060 in Australien leben werden.

A1.2 Stelle eine Vermutung über die Größe der voraussichtlichen Kamelpopulation in Australien für die Jahre 2051 auf und begründe diese.

A2 Stelle den Sachverhalt graphisch dar und diskutiere das verwendete mathematische Modell.

In der Dokumentation wurde auch gesagt, dass nur 24 Kaninchen in Australien eingeführt wurden und heutzutage leben Milliarden von Kaninchen auf dem Kontinent.

A3 Stelle ein mathematisches Modell auf, das den Sachverhalt beschreibt und gib an um wie viel Prozent die australische Kaninchenpopulation demnach jährlich gewachsen war.

<u>Hinweis:</u>

> Die weiträumigsten Zerstörungen richtete wahrscheinlich das europäische **Kaninchen** an, das 1788 mit der Ersten Flotte nach Australien kam. Die folgenschwere Übersiedlung dieser Tiere wird jedoch auf das Jahr 1859 datiert, in dem Thomas Austin 24 Wildkaninchen als Jagdwild nach Australien brachte und sie auf seinem Grundbesitz in der Nähe von Geelong in Victoria aussetzte. Unter den idealen Voraussetzungen der australischen Wildnis, in der nur wenige natürliche Feinde des Kaninchens lebten, vermehrten sich die Tiere unglaublich schnell und wurden bald schon zur Landplage. Im frühen 20. Jahrhundert schätzte man die Gesamtzahl der Kaninchen auf etwa 500 Millionen.
>
> http://www.australien-panorama.de/fakten/ausfauna_probleme.html 04.04.2012

N3 Wildes Outback – Leben in Down Under.

Es wird ein Ausschnitt aus der ZDF-Dokumentation „*TerraX – Teuflisches Paradies Australien*“ vom 26.02.2012 gezeigt. Schaue dir den Beitrag aufmerksam an.

Mit den Informationen aus dem Dokumentarfilm und den folgenden Fakten aus dem Internet, kann man ermitteln, wie stark die Kamelpopulation in Australien in den nächsten Jahren wachsen könnte.

> **Kamele** und **Pferde** haben sich bei der Erschließung des Landes verdient gemacht. Nach ihrer Freilassung haben sie sich in freier Wildbahn zügig vermehrt. Mittlerweile ziehen große Herden wilder Pferde (Brumbies) und Kamele durch die Steppen des Landes. Zwischen 1840 und 1907 wurden rund 20.000 Kamele als Arbeitstiere nach Australien importiert. Ergebnissen einer Studie der Nationalparkverwaltung von 2012 zufolge gibt es heute zwischen 600.000 und 750.000 Kamele in Australien. Es wird eine Verdopplung des Bestandes alle acht Jahre vorhergesagt. Kamele werden wegen der Überweidung und Verschmutzung von Wasserlöchern als schädlich für das sensible australische Ökosystem betrachtet.
>
> http://www.australien-panorama.de/fakten/ausfauna_probleme.html 04.04.2012

☹	😐	☺

A1 **Bestimme auf Grundlage der Schätzwerte die voraussichtliche Anzahl von Kamelen, die in den Jahren 2036, 2052 und 2060 in Australien leben werden.**

A2 **Stelle den Sachverhalt graphisch dar und diskutiere das verwendete mathematische Modell.**

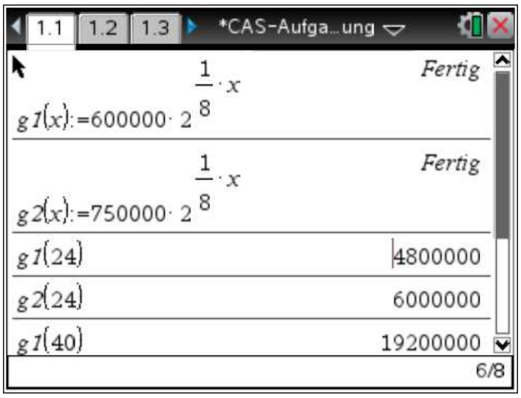
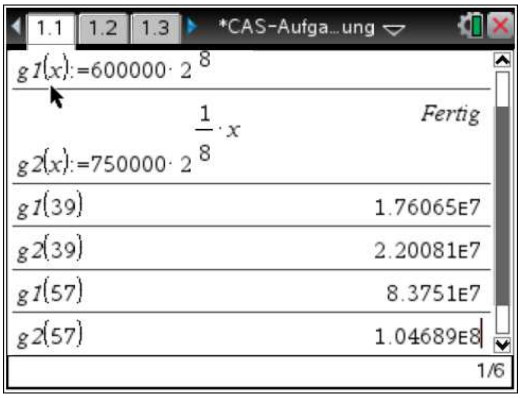
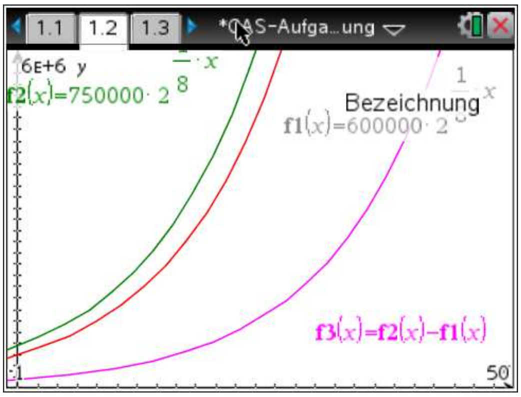
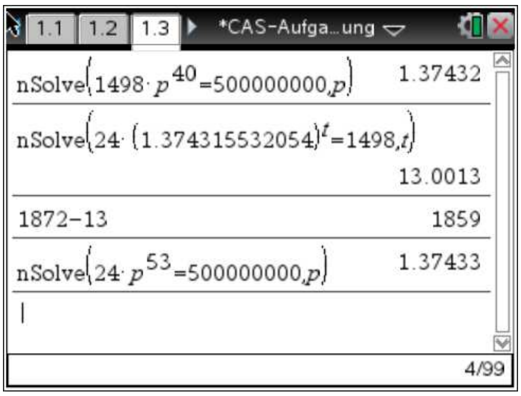
In der Dokumentation wurde auch gesagt, dass nur 24 Kaninchen in Australien eingeführt wurden und heutzutage leben Milliarden von Kaninchen auf dem Kontinent.

A3 **Stelle ein mathematisches Modell auf, das den Sachverhalt beschreibt und gib an um wie viel Prozent die australische Kaninchenpopulation demnach jährlich gewachsen war.**

Hinweis:

> Die weiträumigsten Zerstörungen richtete wahrscheinlich das europäische **Kaninchen** an. […] Die folgenschwere Übersiedlung dieser Tiere wird auf das Jahr 1859 datiert, in dem Thomas Austin 24 Wildkaninchen als Jagdwild nach Australien brachte und sie auf seinem Grundbesitz in der Nähe von Geelong in Victoria aussetzte. Unter den idealen Voraussetzungen der australischen Wildnis, in der nur wenige natürliche Feinde des Kaninchens lebten, vermehrten sich die Tiere unglaublich schnell und wurden bald schon zur Landplage. Im frühen 20. Jahrhundert schätzte man die Gesamtzahl der Kaninchen auf etwa 500 Millionen.
>
> http://www.australien-panorama.de/fakten/ausfauna_probleme.html 04.04.2012

Lösungshinweise zu Aufgabe 5: Wildes Outback – Leben in Down Under.

Aufgabe	Lösungshinweis	Screenshot (Beispiel)
A1.1	Es liegen zwei Schätzwerte für die Population im Jahre 2012 vor, daher kann man sich für einen entscheiden oder jeweils als Lösung ein Intervall angeben. Es ist weiterhin bekannt, dass eine Verdopplung alle 8 Jahre erfolgt. Für die ersten Jahreszahlen entsteht da kein Problem, da die Differenzen Vielfache von 8 sind.	
A1.2	Die Berechnung der Populationsgröße in den Jahren 2051 und 2069 beinhalten ein kleines Problem. Die Differenz zum Jahr 2012 ist kein Vielfaches von 8. Wenn man zur Berechnung die Funktion aus Aufgabe A1.1 verwendet, nimmt man für die 8-Jahresräume ein lineares Wachstum an. Das ist aber unwahrscheinlich. Da die Jahre 2051 und 2069 am Ende bzw. am Anfang einer solchen 8-Jahresperiode liegen, kann man schlussfolgern, dass die zu erwartenden Zahlen darüber bzw. darunter liegen müssen.	
A2	Auf der Grundlage der gegebenen Informationen liegt es nahe, dass es sich bei dem Wachstum der Kamel-Population in Australien um ein exponentielles Wachstum handelt. Allerdings werden sicherlich Maßnahmen unternommen um das Wachstum einzudämmen, daher handelt es sich bei den berechneten Werten nur um Schätzwerte. Außerdem vergrößert sich über die Zeit der Abstand zwischen dem unteren und dem oberen Schätzwert stetig. Dieses Wachstum ist auch exponentiell. Damit werden Aussagen ungenauer, je weiter sie in der Zukunft liegen.	
A3	Bei diesem rasanten Wachstum der Kaninchen-Population muss es sich um exponentielles Wachstum handeln. In jedem Fall erkennt man, dass die Population jährlich um 37,4% gewachsen war. N1: Die beiden Zeitpunkte ermöglichen es die Wachstumsrate p zu bestimmen. Wenn man dann von 1872 zurückrechnet, kommt man auf die Vermutung, dass die Kaninchen 1859 ausgesetzt wurden.	

Aufgabe 6: Zur Sicherheit: Trigonometrische Funktionen.

Themengebiet	*Trigonometrische Funktionen*

Klassenstufe	*10*

Kurzbeschreibung	*Die **Deutsche Bahn** ist bestrebt ihre Fahrkarten fälschungssicher zu gestalten und verwendet daher unterschiedliche Techniken um dies zu erreichen. Auf der Rückseite der Fahrkarten ist ein Wellenmuster zu erkennen, dass aus zwei Funktionsgraphen besteht. Da es sich augenscheinlich um periodische Funktionen handelt, liegt es nahe das Wellenmuster mit trigonometrischen Funktionen zu beschreiben. Doch wie lauten die entsprechenden Funktionsgleichungen?* *Die dazu gehörigen Überlegungen führen in letzter Konsequenz zu fundamentalen Zusammenhängen der Mathematik, und zwar zu den Fourier-Reihen. Die Idee, dass man jede Funktion durch eine unendliche Linearkombination der trigonometrischen Funktionen beschreiben kann, nimmt in dieser Aufgabe ihren Anfang. Allerdings muss man diesen Gedanken mit den Schülern nicht bis zu Ende denken.*

Lehrplanbezüge	*...charakteristische Eigenschaften für die Sinus- und die Kosinusfunktion angeben.* *...den Einfluss der Parameter (a, b, c, d) auf Eigenschaften der Sinusfunktion $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot x)+c$ sowie $f(x)=\sin(x-d)$ beschreiben.* *...die Werkzeuge eines CAS verständig nutzen, um solche Funktionen graphisch, tabellarisch oder durch eine Funktionsgleichung darzustellen und auf Eigenschaften zu untersuchen.* *...trigonometrische Berechnungen auch mit CAS durchführen.*

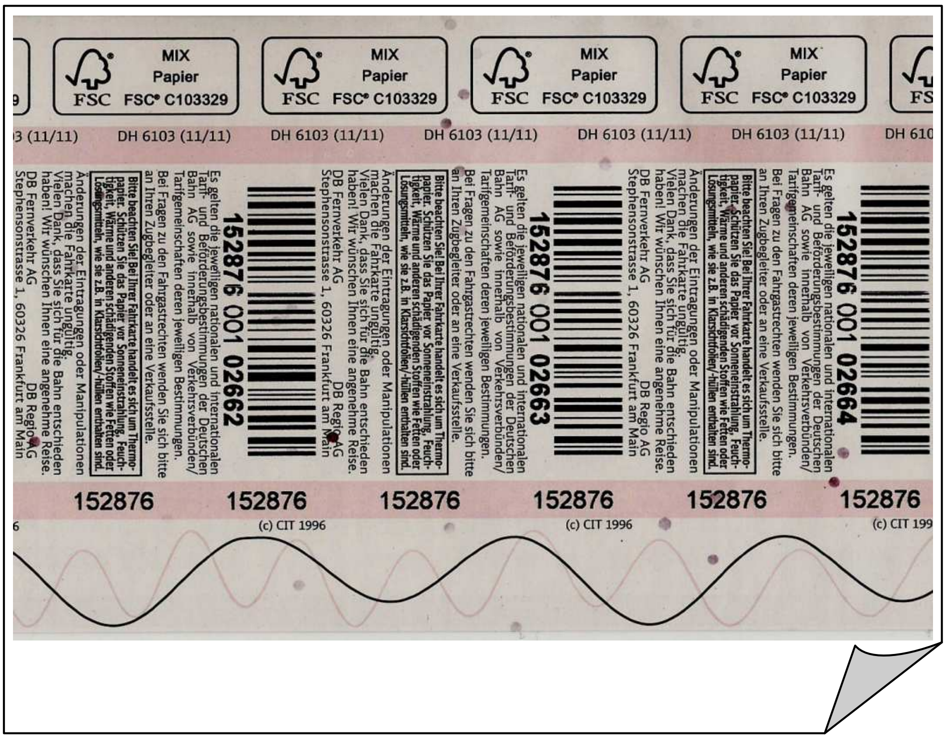
Mathematische Leitideen	*Funktionaler Zusammenhang* *Zahl*

Vorschlag zur Zuordnung der Mathematischen Kompetenzen

Aufgabe	Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	Mathematisch Kommunizieren
A1.1		x	x	x		
A1.2				x	x	x
A2.1		x		x	x	
A2.2	x					x

N1 Zur Sicherheit: Trigonometrische Funktionen.

Die Deutsche Bahn ist sehr bemüht ihre Fahrkarten fälschungssicher zu gestallten. Daher druckt Sie unter anderem auf die Rückseite der Tickets ein Wellenmuster (siehe Abbildung).



☹	😐	☺

A1.1 **Bestimme die Funktionsgleichungen zweier periodischer Funktionen, deren Graphen das Wellenmuster beschreiben.**

A1.2 **Gib zwei Möglichkeiten an, die Graphen der periodischen Funktionen noch komplizierter zu gestalten.**

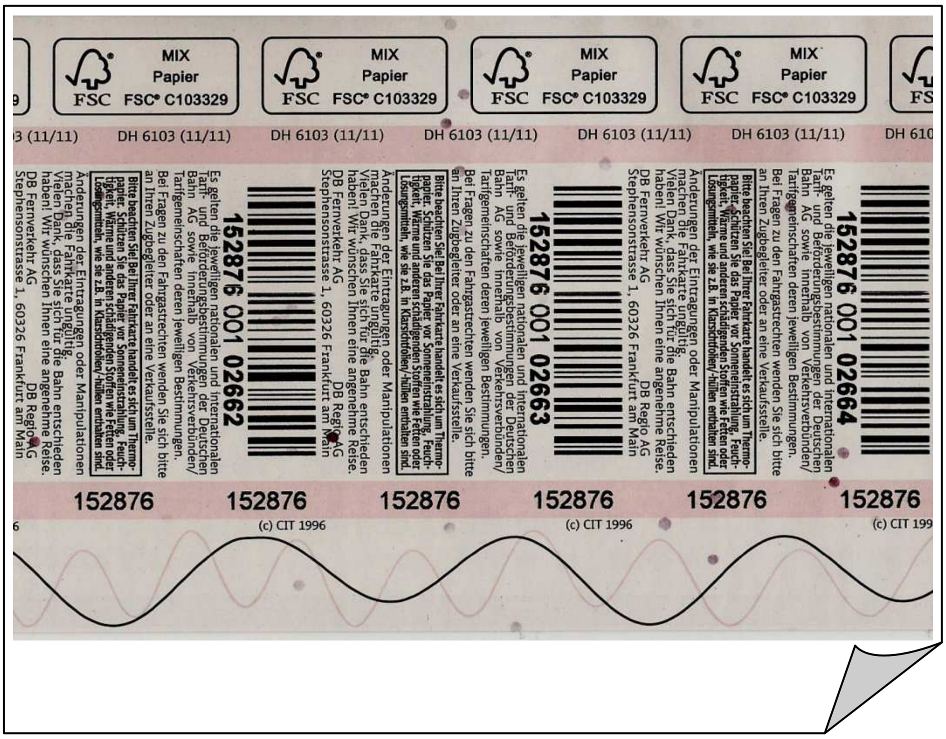
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2} \cdot \pi \cdot x)$.

A2.1 **Erzeuge eine Wertetabelle mit 100 Einträgen, in der sich kein Funktionswert wiederholt.**

A2.2 **Beschreibe ein allgemeines Verfahren für das Erzeugen einer solchen Wertetabelle einer periodischen Funktion.**

N2 Zur Sicherheit: Trigonometrische Funktionen.

Die Deutsche Bahn ist sehr bemüht ihre Fahrkarten fälschungssicher zu gestallten. Daher druckt Sie unter anderem auf die Rückseite der Tickets ein Wellenmuster (siehe Abbildung).



☹	😐	☺

A1.1 **Bestimme die Funktionsgleichungen einer periodischen Funktion, deren Graphen einen Teil des Wellenmusters beschreibt.**

A1.2 **Gib eine Möglichkeit an, die Graphen der periodischen Funktionen noch ausgefallener zu gestalten.**

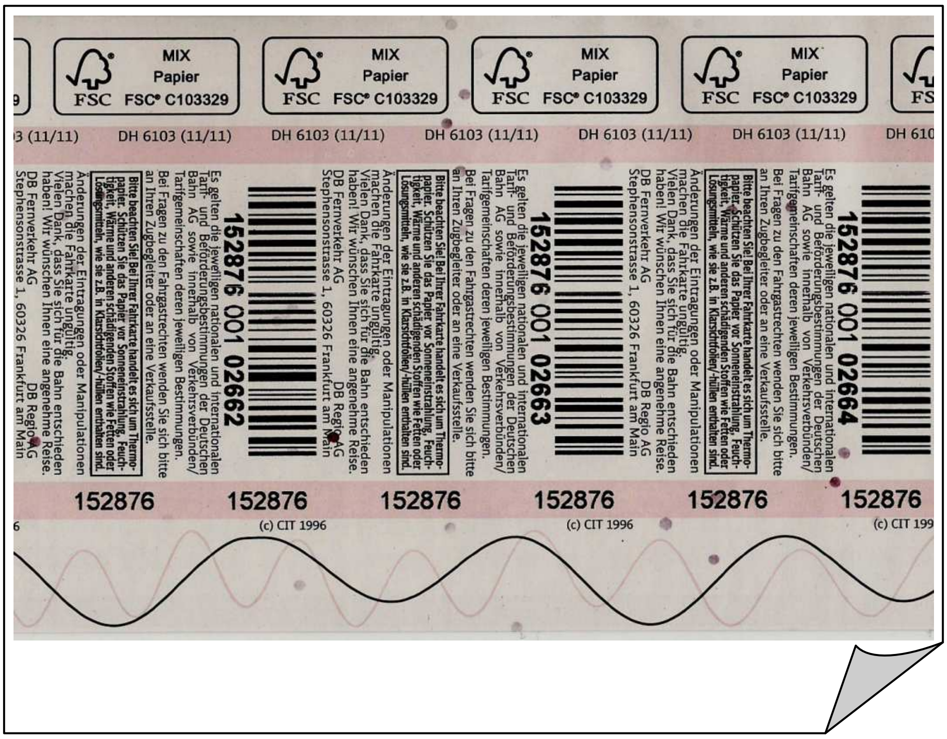
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\cos(3\pi \cdot x)$.

A2.1 **Erzeuge eine Wertetabelle mit 50 Einträgen, in der sich kein Funktionswert wiederholt.**

A2.2 **Beschreibe ein allgemeines Verfahren für das Erzeugen einer solchen Wertetabelle einer periodischen Funktion.**

N3 Zur Sicherheit: Trigonometrische Funktionen.

Die Deutsche Bahn ist sehr bemüht ihre Fahrkarten fälschungssicher zu gestallten. Daher druckt Sie unter anderem auf die Rückseite der Tickets ein Wellenmuster (siehe Abbildung).



☹	😐	☺

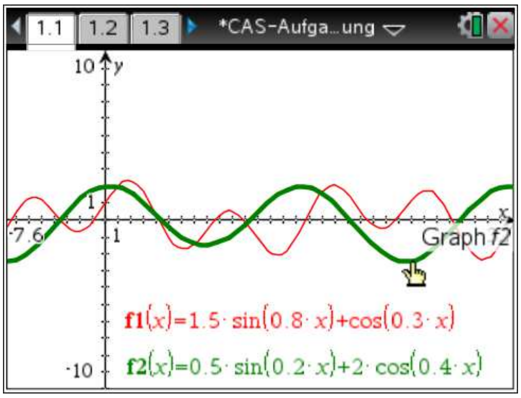
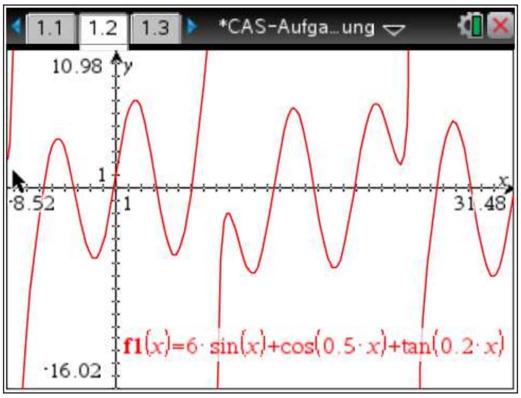
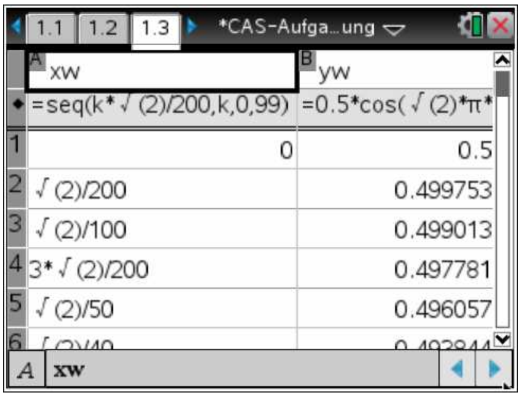
A1.1 **Bestimme die Funktionsgleichung einer periodischen Funktion, deren Graph einen Teil des Wellenmusters beschreibt.**

A1.2 **Gib eine Möglichkeit an, die Graphen der periodischen Funktionen noch komplizierter zu gestalten.**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\cos(\pi \cdot x)$.

A2.1 **Erzeuge eine Wertetabelle mit 20 Einträgen, in der sich kein Funktionswert wiederholt.**

Lösungshinweise zu Aufgabe 6: Zur Sicherheit: Trigonometrische Funktionen.

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Lösungshinweis</th><th>Screenshot (Beispiel)</th></tr>
<tr><td>A1.1</td><td>Es geht bei der Aufgabe nicht darum, das Muster ganz exakt zu rekonstruieren. Wenn man erkennt, dass sich das Muster jeweils durch eine Welle in der Welle auszeichnet, ist der Anfang gemacht. Jetzt kann man ein bisschen mit den Parametern der trigonometrischen Funktionen spielen und sich die Graphen immer wieder plotten lassen. Entscheidend ist die Idee, eine Linearkombination zu erstellen.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A1.2</td><td>Es gibt viele Möglichkeiten die Graphen der Funktionen komplizierter zu gestalten. So kann man z.B. abschnittsweise definierte Funktionen ergänzen. Oder man erzeugt Polstellen, in dem man Summanden wie $\frac{1}{1-x^2}$ oder tan(x) addiert.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A2.1</td><td>Es ist klar, dass man eine solche Tabelle am besten mit einer Tabellenkalkulationssoftware erstellen kann. Dennoch braucht man eine Idee, damit sich kein Wert in der Tabelle wiederholt. Bestimmt man die Periodenlänge der gegeben Funktion, so kann man mit Sicherheit sagen, dass sich in der ersten Hälfte einer solchen Periode kein Funktionswert gleicht. Demnach kann man ein solches Intervall (½ der Periodenlänge) in 100, 50 bzw. 20 Abschnitte teilen.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A2.2</td><td>Es soll allgemein beschrieben werden, welche Überlegungen der Aufgabe A2.1 zugrunde liegen. Die Kern-Idee ist, bei einer gegebenen periodischen Funktion, die Periodenlänge zu bestimmen. Es steht fest, dass sich innerhalb einer halben Periode kein Funktionswert doppelt. Unterteilt man nun ein Intervall der Länge einer halben Periode in beliebig viele Abschnitte, so werden sich die dazugehörigen Funktionswerte nicht wiederholen. Auf diese Weise kann man zu jeder periodischen Funktion eine Tabelle mit beliebig vielen Einträgen ohne Wiederholung erzeugen.</td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe 7: Die Würfel sind gefallen, Davy Jones.

Themengebiet	*Binomialverteilung*

Klassenstufe	*10*

Kurzbeschreibung	*In dem Film **Fluch der Karibik 2** gibt es eine bekannte Filmszene. Der Hauptakteur Will Turner spielt mit seinem Vater und seinem Kontrahenten Davy Jones Würfelpoker. Bei diesem Spiel muss man Pasche von Augenzahlen ansagen, wobei alle Würfel im Spiel zählen. Sehen kann jeder Spieler aber nur die eigenen fünf Würfel, die anderen Würfel bleiben für ihn verdeckt. Dieses Spiel wird auch in großen Casinos gespielt und es fällt auf, dass sich Davy Jones wie ein Profispieler in einem solchen Casino verhält. Spannend ist die mathematische Begründung für seine Spielstrategie.* *Ein ganz ähnliches Spiel ist das Gesellschaftsspiel **Bluff.** Bei diesem Spiel werden nach jeder Runde Würfel entfernt. Damit ändern sich ständig die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Interessant ist es wie sich die dazugehörigen Histogramme entwickeln.* *Der Link zum Filmausschnitt lautet:* *http://www.youtube.com/watch?v=evY3fd0Nctw*

Lehrplanbezüge	*...Bernoulli-Experimente als mehrstufige Zufallsexperimente beschreiben und Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Bernoulli-Formel unter Nutzung das CAS berechnen.* *...Die bei Zufallsexperimenten gewonnen Daten, auch unter Nutzung von Computersoftware, in Tabellen und Diagrammen darstellen und auswerten.* *...Ideen und Ergebnisse zur Beschreibung, Simulation und Berechnung von Zufallsexperimenten adressatengerecht formulieren und bewerten.*

Mathematische Leitideen	*Daten und Zufall*

Vorschlag zur Zuordnung der Mathematischen Kompetenzen

Aufgabe	Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	Mathematisch Kommunizieren
A1.1		x	x		x	x
A2.1			x		x	
A2.2			x		x	
A3	x					x
W4.1	x		x		x	x
W4.2	x		x		x	x

N1 Die Würfel sind gefallen, Davy Jones.

Gezeigt wird ein Ausschnitt aus dem Kinofilm „*Fluch der Karibik 2*". Schaue dir die Szene aufmerksam an.

In dem Film tritt Will Turner gegen seinen Vater und Davy Jones in einem Würfelspiel an. Dabei würfelt jeder der drei Spieler mit 5 Würfeln, deren Augen er sich verdeckt anschauen darf. Reihum müssen nun höhere Pasche angesagt werden, wobei alle Würfel zählen. Wenn ein Spieler der Meinung ist, dass der Vorgänger gelogen hat, kann er aufdecken lassen.

In diesem speziellen Fall haben sich die beiden Kontrahenten die Fünfen zum Bieten herausgesucht. Davy Jones hat gesehen, dass er 4 Fünfen hat und er sagt 7 Fünfen an.

☹	😐	☺

A1 Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass er mit seiner Aussage richtig liegt. Schätze ein, was Davy Jones für ein Spielertyp ist.

Wenn man davon ausgeht, dass dieses Spiel von drei Spielern gespielt wird, dann besitzt jeder Spieler 5 Würfel, die er sich anschauen darf. Von Interesse für eine Spielstrategie sind demnach die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Augenzahlen auf den verdeckten Würfeln.

A2.1 Bestimme die Wahrscheinlichkeiten bei diesem Spiel genau eine weitere Fünf, genau zwei weitere Fünfen, genau drei weitere Fünfen, und so weiter unter den verdeckten Würfeln zu finden.

Bei diesem Spiel verliert man nicht, wenn man einen Pasch ansagt, der unter dem tatsächlichen Ergebnis liegt.

A2.2 Bestimme daher ebenfalls die Wahrscheinlichkeiten dafür mindestens eine weitere Fünf, mindestens zwei weitere Fünfen, mindestens drei weitere Fünfen, und so weiter unter den verdeckten Würfeln zu finden.

A3 Versuche auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeiten aus Aufgabe A2 Empfehlungen für eine Spielstrategie bei diesem Spiel auszusprechen. Gehe dabei auch auf den Spielzug von Davy Jones aus Aufgabe A1 ein.

Wahlaufgabe (Zusatz):

W4.1 Simuliere die obige Spielsituation 30mal (10 Würfel werden geworfen). Vergleiche die relative Häufigkeit des Ereignisses *alle Würfel zeigen mindestens 3 Fünfen* mit der Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis. Gib Gründe für mögliche Unterschiede der beiden Größen an und gehe dabei auf den Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen ein.

Ein beliebtes Gesellschaftsspiel ist „*Bluff*". Dieses Spiel ist dem obigen sehr ähnlich, nur dass die 6 als Joker fungiert und jeder anderen Augenzahl zugordnet werden kann. Dieses Spiel geht über mehrere Runden, wobei der Verlierer einer Runde immer einen Teil seiner Würfel abgeben muss.

W4.2 Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung für 6 Personen mit jeweils 5 Würfeln (das ist die maximale Spieleranzahl) auf. Überlege dir, wie sich die Verteilung ändert, wenn immer mehr Würfel aus dem Spiel genommen werden. Stelle diesen Zusammenhang graphisch dar. Gib Strategieempfehlungen in Anlehnung an A3 an.

N2 Die Würfel sind gefallen, Davy Jones.

Gezeigt wird ein Ausschnitt aus dem Kinofilm „*Fluch der Karibik 2*". Schaue dir die Szene aufmerksam an.

In dem Film tritt Will Turner gegen seinen Vater und Davy Jones in einem Würfelspiel an. Dabei würfelt jeder der drei Spieler mit 5 Würfeln, deren Augen er sich verdeckt anschauen darf. Reihum müssen nun höhere Pasche angesagt werden, wobei alle Würfel zählen. Wenn ein Spieler der Meinung ist, dass der Vorgänger gelogen hat, kann er aufdecken lassen.

In diesem speziellen Fall haben sich die beiden Kontrahenten die Fünfen zum Bieten herausgesucht. Davy Jones hat gesehen, dass er 4 Fünfen hat und er sagt 7 Fünfen an.

☹	😐	☺

A1 Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass er mit seiner Aussage richtig liegt. Schätze ein, was Davy Jones für ein Spielertyp ist.

Wenn man davon ausgeht, dass dieses Spiel von drei Spielern gespielt wird, dann besitzt jeder Spieler 5 Würfel, die er sich anschauen darf. Von Interesse für eine Spielstrategie sind demnach die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Augenzahlen auf den verdeckten Würfeln.

A2 Bestimme die Wahrscheinlichkeiten bei diesem Spiel genau eine weitere Fünf, genau zwei weitere Fünfen, genau drei weitere Fünfen, und so weiter unter den verdeckten Würfeln zu finden.

A3 Versuche auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeiten aus Aufgabe A2 Empfehlungen für eine Spielstrategie bei diesem Spiel auszusprechen. Gehe dabei auch auf den Spielzug von Davy Jones aus Aufgabe A1 ein.

Wahlaufgabe (Zusatz):

W4.1 Simuliere die obige Spielsituation 30mal (10 Würfel werden geworfen). Vergleiche die relative Häufigkeit des Ereignisses *alle Würfel zeigen mindestens 3 Fünfen* mit der Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis. Gib Gründe für mögliche Unterschiede der beiden Größen an und gehe dabei auf den Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen ein.

Ein beliebtes Gesellschaftsspiel ist „*Bluff*". Dieses Spiel ist dem obigen sehr ähnlich, nur dass die 6 als Joker fungiert und jeder anderen Augenzahl zugordnet werden kann. Dieses Spiel geht über mehrere Runden, wobei der Verlierer einer Runde immer einen Teil seiner Würfel abgeben muss.

W4.2 Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung für 6 Personen mit jeweils 5 Würfeln (das ist die maximale Spieleranzahl) auf. Überlege dir, wie sich die Verteilung ändert, wenn immer mehr Würfel aus dem Spiel genommen werden. Stelle diesen Zusammenhang graphisch dar.

N3 Die Würfel sind gefallen, Davy Jones.

Gezeigt wird ein Ausschnitt aus dem Kinofilm „*Fluch der Karibik 2*". Schaue dir die Szene aufmerksam an.

In dem Film tritt Will Turner gegen seinen Vater und Davy Jones in einem Würfelspiel an. Dabei würfelt jeder der drei Spieler mit 5 Würfeln, deren Augen er sich verdeckt anschauen darf. Reihum müssen nun höhere Pasche angesagt werden, wobei alle Würfel zählen. Wenn ein Spieler der Meinung ist, dass der Vorgänger gelogen hat, kann er aufdecken lassen.

In diesem speziellen Fall haben sich die beiden Kontrahenten die Fünfen zum Bieten herausgesucht. Davy Jones hat gesehen, dass er 4 Fünfen hat und er sagt 7 Fünfen an.

☹	😐	☺

A1 Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass er mit seiner Aussage richtig liegt. Schätze ein, was Davy Jones für ein Spielertyp ist.

Wenn man davon ausgeht, dass dieses Spiel von drei Spielern gespielt wird, dann besitzt jeder Spieler 5 Würfel, die er sich anschauen darf. Von Interesse für eine Spielstrategie sind demnach die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Augenzahlen auf den verdeckten Würfeln.

A2 Bestimme die Wahrscheinlichkeiten bei diesem Spiel genau eine weitere Fünf, genau zwei weitere Fünfen, genau drei weitere Fünfen, und so weiter unter den verdeckten Würfeln zu finden.

A3 Versuche auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeiten aus Aufgabe A2 Empfehlungen für eine Spielstrategie bei diesem Spiel auszusprechen. Gehe dabei auch auf den Spielzug von Davy Jones aus Aufgabe A1 ein.

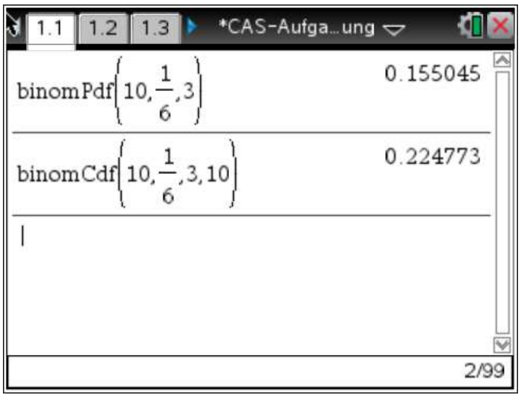
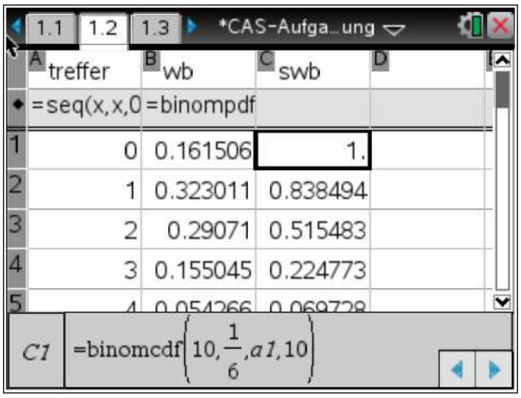
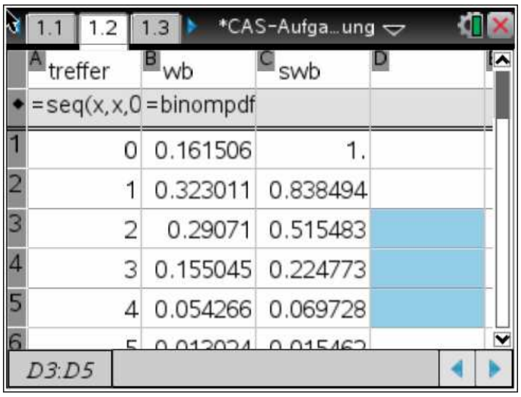
<u>Wahlaufgabe (Zusatz):</u>

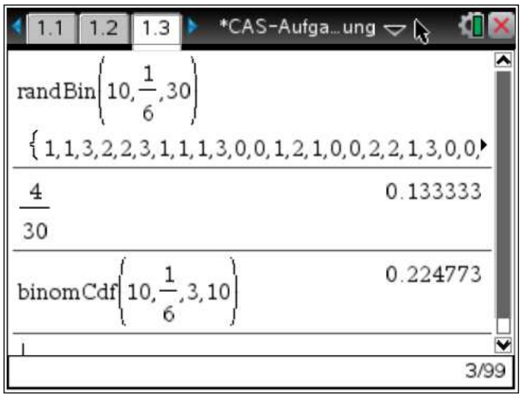
W4.1 Simuliere die obige Spielsituation 20mal (10 Würfel werden geworfen). Vergleiche die relative Häufigkeit des Ereignisses *alle Würfel zeigen genau 3 Fünfen* mit der Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis. Gib Gründe für mögliche Unterschiede der beiden Größen an und gehe dabei auf den Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen ein.

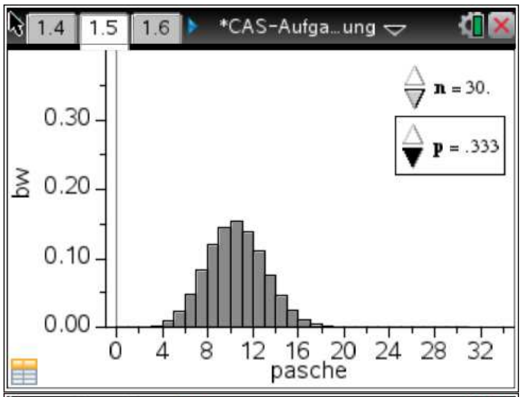
Ein beliebtes Gesellschaftsspiel ist „*Bluff*". Dieses Spiel ist dem obigen sehr ähnlich, nur dass die 6 als Joker fungiert und jeder anderen Augenzahl zugordnet werden kann. Dieses Spiel geht über mehrere Runden, wobei der Verlierer einer Runde immer einen Teil seiner Würfel abgeben muss.

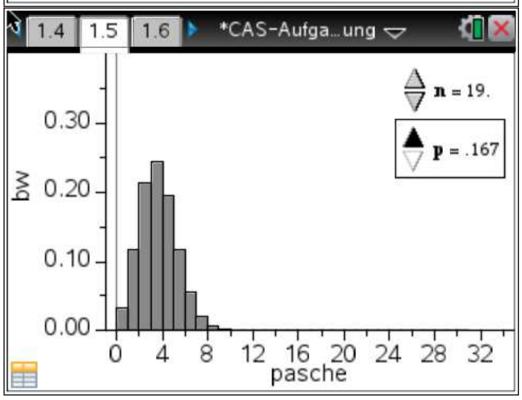
W4.2 Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung für 6 Personen mit jeweils 5 Würfeln (das ist die maximale Spieleranzahl) auf. Überlege dir, wie sich die Verteilung ändert, wenn immer mehr Würfel aus dem Spiel genommen werden. Stelle diesen Zusammenhang graphisch dar.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7: Die Würfel sind gefallen – Davy Jones.

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Lösungshinweis</th><th>Screenshot (Beispiel)</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Die Wahrscheinlichkeiten bei diesem Würfelspiel sind binomial verteilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass Davy Jones richtig liegt, hängt von der Interpretation der Spielregeln ab. Man kann unterscheiden, ob es genau drei Fünfen sein müssen, oder ob es mehr sein können. Ist es erlaubt einen niedrigeren Pasch anzusagen, dann hat er eine Wahrscheinlichkeit von 22% richtig zu liegen. Demnach könnte man annehmen, dass er ein sehr risikofreudiger Spieler ist.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A2.1 & A2.2</td><td>Mit Hilfe einer Tabellenkalkulationssoftware kann man sich schnell alle 11 Fälle übersichtlich anzeigen lassen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten betrachten.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A3</td><td>Es fällt auf, dass es sehr unwahrscheinlich ist, dass es mehr als 3 Fünfen in diesem Spiel geben kann (p<7%) 3 Fünfen ist also das höchste, was man als Spieler in dieser Situation ansagen kann. Der Vorteil dieser aggressiven Spielweise ist, dass man seinen Gegner stark unter Druck setzt. Würde man einen niedrigeren Pasch ansagen, so bleibt dem Gegner immer noch eine recht aussichtsreiche Gewinnchance, wenn er erhöht. Wenn man dem Gegner diese Chance nicht geben will, kann man gleich hoch anspielen. Davy Jones spielt also kein Hasardspiel, sondern er will seinen Gegner unter Druck setzten.</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>W4.1</td>
<td>Simuliert man die Würfe mit einer geeigneten Software, kann man die absolute Häufigkeit des Ereignisses 3 (oder mehr) Fünfen bestimmen. Anschließend kann man die relative Häufigkeit berechnen und mit der Wahrscheinlichkeit für das entsprechende Ereignis vergleichen. Im Allgemeinen sind die beiden Größen von einander verschieden. Es ist aber klar, dass mit steigender Anzahl an Versuchen, sich die relative Häufigkeit an die Wahrscheinlichkeit immer weiter annähern wird.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>W4.2</td>
<td>Genau wie in Aufgabe A2 kann eine Tabelle als Ausgangslage für seine Überlegungen erstellen. Die resultierenden Wahrscheinlichkeiten kann man als Histogramm plotten. Fügt man noch zwei veränderliche Parameter ein (p -Wahrscheinlichkeit, n - Anzahl), dann ist das Histogramm interaktiv und man kann die rapide Verschiebung der Wahrscheinlichkeiten bei Entnahme von Würfeln aus dem Spiel beobachten.

Diese kleine Datei kann man beim nächsten Spiele-Abend gut verwenden, wenn man bei dem Spiel Bluff die Wahrscheinlichkeiten für die Pasche bestimmen will. Da das Spiel über mehrere Runden geht, ist es sinnvoll, die Wahrscheinlichkeiten beim Bieten zu beachten. Mit der Zeit wird man sich einen Vorteil erspielen. Bei Belieben kann man dies mit der Strategie von Davy Jones aus Aufgabe A3 kombinieren um die Mitspieler richtig ins Schwitzen zu bringen.</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Aufgabe 8: Lotto für Fortgeschrittene.

Themengebiet	*Stochastik*

Klassenstufe	*10*

Kurzbeschreibung	*Lotto ist ein beliebtes Tipp-Spiel, obwohl es vielen Mitspielern bewusst ist, dass die Gewinnchancen bei diesem Spiel gering sind. Die Wahrscheinlichkeit z.B. für einen* ***Sechser im Lotto*** *kann man schnell berechnen. Sie liegt bei ungefähr 1 : 14 000000. Diese Wahrscheinlichkeit ist so gering, dass man denken könnte, das Ereignis tritt niemals ein. Verblüffender Weise gibt es jedes Jahr eine Reihe von Lotto-Millionären. Lohnt es sich also doch Lotto zu spielen?*

Lehrplanbezüge	*...Ergebnisse stochastischer Berechnungen auf Plausibilität überprüfen und kritisch werten.* *...Chancen und Risiken von zufälligen Ereignissen in Sachkontexten beurteilen.* *...Die bei Zufallsexperimenten gewonnen Daten, auch unter Nutzung von Computersoftware, in Tabellen und Diagrammen darstellen und auswerten.* *...Ideen und Ergebnisse zur Beschreibung, Simulation und Berechnung von Zufallsexperimenten adressatengerecht formulieren und bewerten.*

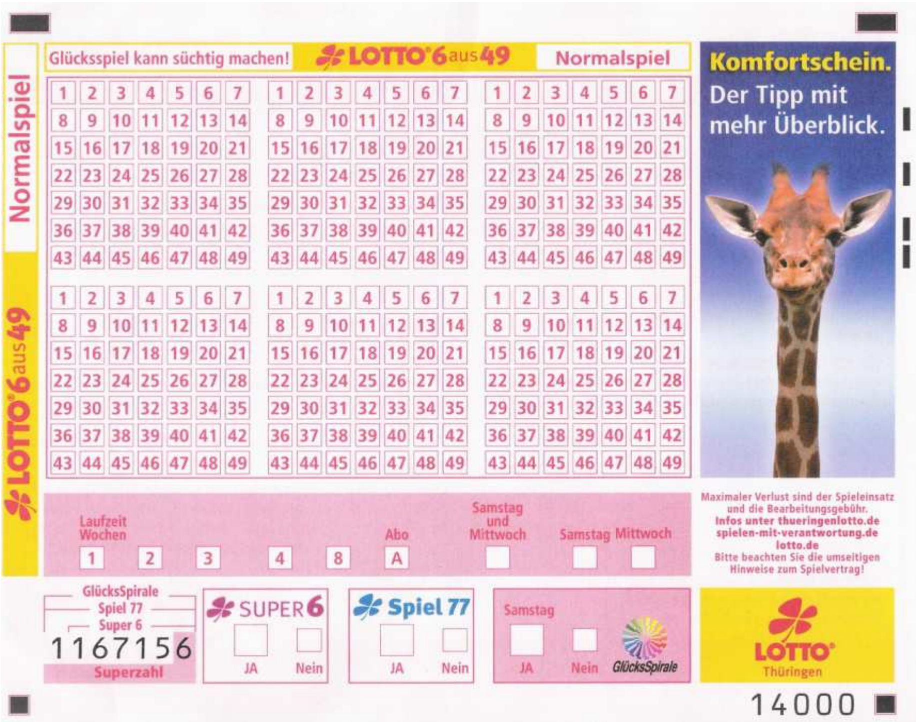
Mathematische Leitideen	*Daten und Zufall*

Vorschlag zur Zuordnung der Mathematischen Kompetenzen

Aufgabe	**Mathematisch argumentieren**	**Probleme mathematisch lösen**	**Mathematisch modellieren**	**Mathematische Darstellungen verwenden**	**Mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen**	**Mathematisch Kommunizieren**
A1			x			
A2			x		x	
A3		x	x		x	
A4	x					x

N1 Lotto für Fortgeschrittene.

Zweimal in der Woche werden die Lottozahlen gezogen. Jeder Mitspieler kann seinen Tipp auf solch einem Lottoschein abgeben.



☺	😐	☹

A1 **Fülle den Tippschein aus und simuliere die Ziehung der Lottozahlen.**

A2 **Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für sechs, fünf, vier, usw. Richtige im Lotto.**

A3 **Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein „Sechser“ von den Teilnehmern einer Lottoziehung getippt wird.**

Hinweis: Ein Anhaltspunkt für die Anzahl an Lotto-Spielern findet sich im nachstehenden Internetartikel.

A4 **Vergleich deine berechnete Wahrscheinlichkeit mit den Daten aus dem nachstehenden Internetartikel. Diskutiere die Wahrscheinlichkeiten aus Sicht der Lotto-Gesellschaft.**

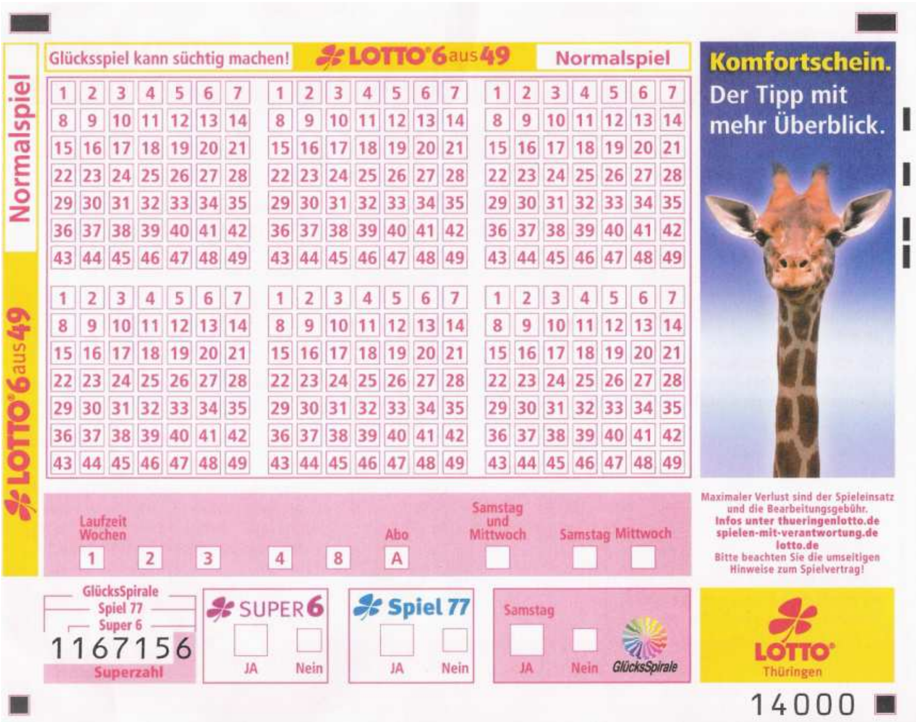
Umfragen und Statistiken zu Lotto und Lotterie

Fast 10 Millionen Bundesbürger spielen laut einer Umfrage des IfD Allensbach zur Häufigkeit des Spielens von Lotto regelmäßig dieses Glücksspiel. Am beliebtesten ist die Variante Lotto "6 aus 49". 2009 wurden laut einer Statistik zur Anzahl der Lotto-Sechser und Lotto-Millionäre 383-mal ein Lotto-Sechser getippt, 111 Spieler wurden so zu Lottomillionären. Ein Viertel der Deutschen nimmt mindestens einmal im Monat an diesem Lottospiel teil.

http://de.statista.com/themen/130/lotto/

N2 Lotto für Fortgeschrittene.

Zweimal in der Woche werden die Lottozahlen gezogen. Jeder Mitspieler kann seinen Tipp auf solch einem Lottoschein abgeben.



☺	😐	☹

A1 **Fülle den Tippschein aus und simuliere die Ziehung der Lottozahlen.**

A2 **Bestimme die Wahrscheinlichkeit für einen „Sechser im Lotto".**

A3 **Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein „Sechser" von den Teilnehmern einer Lottoziehung getippt wird.**

Hinweis: Ein Anhaltspunkt für die Anzahl an Lotto-Spielern findet sich im nachstehenden Internetartikel.

A4 **Vergleich deine berechnete Wahrscheinlichkeit mit den Daten aus dem nachstehenden Internetartikel. Nehme Stellung zu den Wahrscheinlichkeiten.**

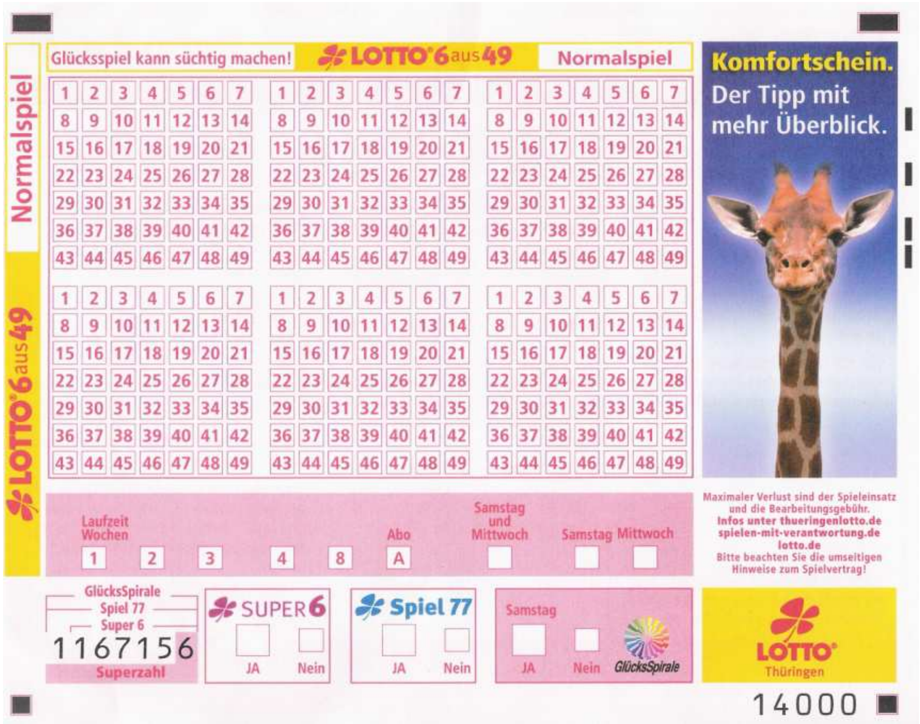
Umfragen und Statistiken zu Lotto und Lotterie

Fast 10 Millionen Bundesbürger spielen laut einer Umfrage des IfD Allensbach zur Häufigkeit des Spielens von Lotto regelmäßig dieses Glücksspiel. Am beliebtesten ist die Variante Lotto "6 aus 49". 2009 wurden laut einer Statistik zur Anzahl der Lotto-Sechser und Lotto-Millionäre 383-mal ein Lotto-Sechser getippt, 111 Spieler wurden so zu Lottomillionären. Ein Viertel der Deutschen nimmt mindestens einmal im Monat an diesem Lottospiel teil.

http://de.statista.com/themen/130/lotto/

N3 Lotto für Fortgeschrittene.

Zweimal in der Woche werden die Lottozahlen gezogen. Jeder Mitspieler kann seinen Tipp auf solch einem Lottoschein abgeben.



☺	😐	☹

A1 **Fülle den Tippschein aus.**

A2 **Bestimme die Wahrscheinlichkeit für einen „Sechser im Lotto“.**

A3 **Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein „Sechser“ von den Teilnehmern einer Lottoziehung getippt wird.**

Hinweis: Ein Anhaltspunkt für die Anzahl an Lotto-Spielern findet sich im nachstehenden Internetartikel.

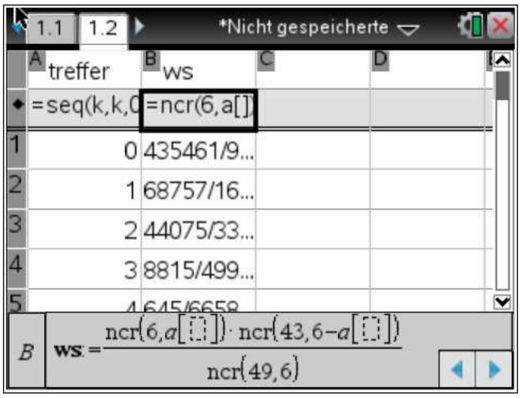
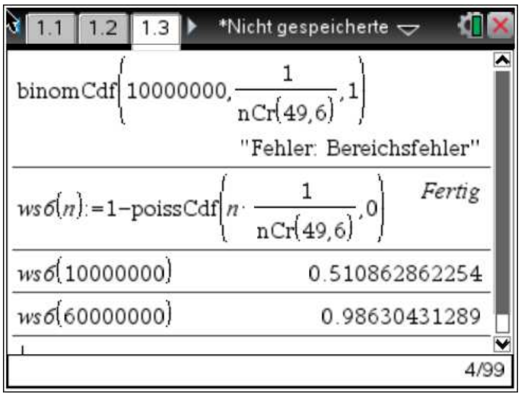
A4 **Vergleich deine berechnete Wahrscheinlichkeit mit den Daten aus dem nachstehenden Internetartikel.**

Umfragen und Statistiken zu Lotto und Lotterie

Fast 10 Millionen Bundesbürger spielen laut einer Umfrage des IfD Allensbach zur Häufigkeit des Spielens von Lotto regelmäßig dieses Glücksspiel. Am beliebtesten ist die Variante Lotto "6 aus 49". 2009 wurden laut einer Statistik zur Anzahl der Lotto-Sechser und Lotto-Millionäre 383-mal ein Lotto-Sechser getippt, 111 Spieler wurden so zu Lottomillionären. Ein Viertel der Deutschen nimmt mindestens einmal im Monat an diesem Lottospiel teil.

http://de.statista.com/themen/130/lotto/

Lösungshinweise zu Aufgabe 8: Lotto für Fortgeschrittene.

Aufgabe	Lösungshinweis	Screenshot (Beispiel)
A1	Den Tipp-Schein ausfüllen geht schnell, aber man bekommt auch einen ersten Eindruck dafür, dass jeder Mitspieler 6 Tipps auf diesem Schein abgeben darf. Das wird später noch von Bedeutung sein. Die Simulation der Ziehung der Lotto-Zahlen kann man nutzen um in der Klasse Lotto zu spielen. Dabei kann man sich ja kleine Preise für 3 bis 4 bzw. 5 bis 6 Richtige überlegen.	
A2	Die Wahrscheinlichkeiten für sechs, fünf, vier, usw. Richtige im Lotto kann man mit Hilfe einer Tabellenkalkulationssoftware schnell aufstellen. Die Grundlage zur Berechnung der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten liefert die Hypergeometrische Verteilung.	
A3	Man könnte davon ausgehen, dass die Wahrscheinlichkeiten von Tipp-Treffern im Lotto binomial verteilt sind. Allerdings ist die Einzelwahrscheinlichkeit ($p = {}^{1}/_{13983816}$) so klein und die Anzahl an Tipps ($n > 10\ 000000$) so groß, dass der Rechenaufwand zu groß wird. Wenn man weiß, dass für diesen Fall die Binomialverteilung durch die Possionverteilung approximiert werden kann, kann man die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Anzahl n berechnen.	
A4	Wenn jeder der 10 000000 Spieler nur einen Tipp abgibt, liegt die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Sechser bei 51%. Da aber jeder Spieler auch mehr Tipps abgeben darf, steigt die Wahrscheinlichkeit. Bei 60 000000 Tipps liegt sie bei knapp 99%. Die Lotto-Zahlen werden zweimal in der Woche gezogen und im Jahr 2009 wurden 383 Sechser getippt. Also werden zu jeder Ziehung mehr als einmal sechs Richtige getippt. Die Lotto-Gesellschaft hat ein Interesse daran, dass dies so bleibt, denn die Teilnehmer haben so einen Anreiz weiter zu spielen.	