FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT JENA
Fakultät für Mathematik und Informatik

seit 1558

JENAER SCHRIFTEN ZUR MATHEMATIK UND INFORMATIK

Eingang: 12. Juli 2013   Math / Inf / 05 / 2013
Als Manuskript gedruckt

CAS-Testaufgaben zur Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II

Matthias Müller

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Abteilung für Didaktik der Mathematik und Informatik
Ernst-Abbe-Platz 2
07743 Jena

Matthias.Mueller.2@uni-jena.de

CAS-Testaufgaben zur Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II

Matthias Müller

Die Verwendung von digitalen Werkzeugen wie zum Beispiel Computeralgebra Systemen (CAS) im Mathematikunterricht birgt für Schüler und Lehrer große Potentiale und neue Herausforderungen in sich. Entscheidend bleibt jedoch die Frage, welchen Lernfortschritt die Schüler nach Abschluss eines Themengebietes erzielt haben. Unter der Voraussetzung des CAS-Einsatzes und dem Anspruch der Binnendifferenzierung erscheint diese Frage in einem neuen Licht. Eine mögliche Antwort zur Überprüfung des Lernerfolges der Schüler bot die Aufgabensammlung „CAS-Testaufgaben zur Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I“. Wie der Name verrät, umfasste diese Sammlung acht Aufgaben, welche Themengebiete der Sekundarstufe I behandelten. Die vorliegende Aufgabensammlung stellt eine unmittelbare Fortführung für die Themenbereiche der Sekundarstufe II dar. Die der ersten Sammlung zugrunde liegende Idee der Lernstandsermittlung bei Verwendung digitaler Werkzeuge und unter Berücksichtigung der Leistungsheterogenität einer Schulklasse bildet auch für die vorliegenden fünf Aufgaben den Rahmen. Alle Leser, die mit der Anwendung der Aufgaben aus der vorangegangen Sammlung vertraut sind, können sich sofort dem Studium der neuen Sammlung widmen. Für diejenigen, die sich bei der Anwendung im Unterricht unsicher sind, ist das Manual zu den Aufgaben vorangestellt.

Weitere Hinweise sowie die fünf Testaufgaben finden sich unter nachfolgender Adresse im Internet:

http://www.mz.jena.de/moodle/course/view.php?id=1373

Auf dieser Plattform kann man auch mit interessierten Lehrkräften Kontakt knüpfen und in einen Erfahrungsaustausch treten.

Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird in dieser Aufgabensammlung nur die grammatikalisch männliche Form verwendet, dabei sind aber immer beide Geschlechter gemeint.

Inhalt

Manual: Wie benutze ich diese Aufgaben?

Die nachfolgenden Aufgaben sollen eine Orientierung bieten, wie Lernstandsermittlungen bei dem Einsatz digitaler Werkzeuge aussehen könnten. Die Lehrkraft kann durch die Verwendung der vorliegenden Broschüre individualisierte und differenzierte Rückmeldungen zu dem Lernstand der Schüler erhalten. Dabei werden die Bezüge zum Thüringer Lehrplan [1] und den Bildungsstandards [2] hergestellt, auf deren Grundlage Schlussfolgerungen für den Unterricht und dessen Fortentwicklung gezogen werden können. Die nachfolgenden Testaufgaben sollen in dieser Hinsicht eine Unterstützung für die Lehrkräfte darstellen. Das zugrundeliegende fachdidaktische Konzept fußt auf seinem Vorbild aus der Informatikdidaktik [3].

Allen Aufgaben sind Übersichtsblätter vorangestellt, auf denen das Themengebiet, die Klassenstufe und eine Kurzbeschreibung angeführt sind. Des Weiteren werden detaillierte Lehrplanbezüge hergestellt und Vorschläge für mögliche Zuordnungen zu den mathematischen Kompetenzen unterbreitet. Jede Aufgabe endet mit möglichen Lösungsvorschlägen. Die beigefügten Screenshots wurden mit der TI-Nspire™ CAS Teacher Software angefertigt, jedoch eignen sich zur Bearbeitung der Aufgaben auch andere CAS-Handhelds oder entsprechende Softwareapplikationen.

Vor dem Einsatz der Testaufgaben im Unterricht sollte durch jede Lehrkraft ein kurzer Auswertungsbogen erstellt werden, welcher eigene Lösungsideen und einen Bewertungsmaßstab beinhaltet. Dieser Bogen sollte auf die jeweilige Klasse abgestimmt sein, wobei die beiliegenden Lösungshinweise und Erläuterungen zu den einzelnen Aufgaben Anregungen für den Auswertungsbogen geben sollen. Maßgebend ist jedoch immer der erteilte Unterricht. Um ein differenziertes Bild des Lernstands in einer Klasse zu erhalten, liegt jede Testaufgabe in drei Niveaustufen vor. Diese werden mit abnehmender Schwierigkeit als N1, N2 und N3 bezeichnet. Die entsprechenden Arbeitsblätter jeder Testaufgabe unterscheiden sich innerhalb der Niveaustufen in Anzahl, Umfang und Art der Aufgabenstellung sowie in der Informationsbereistellung oder in der Anzahl der Hinweise. Zur vereinfachten Handhabung sind im Folgenden alle Aufgaben in allen drei Niveaustufen aufgeführt. Die Lehrkraft kann im Vorfeld eine Zuordnung treffen, welcher Schüler welche Niveaustufe bearbeiten soll oder man lässt die Schüler selbst wählen. Damit die Schüler einfache individualisierte Rückmeldungen geben können, sind am Rand der Arbeitsblätter kleine Tabellen mit Smileys abgedruckt. Dort kann eine persönliche Einschätzung zu jeder Teilaufgabe erfolgen. Die Lerner sollen dabei einschätzen, wie gut sie mit der Aufgabe zurechtgekommen sind bzw. wie schwierig sie die Aufgabe empfanden.

Das Konzept sieht vor, dass der Test von allen Schülern einer Klasse bearbeitet wird. Die Lerner sollen im Vorfeld erfahren, dass ein Test durchgeführt wird. Sie sollen auf ihn jedoch nicht speziell vorbereitet werden. Es ist zu empfehlen, dass die Schülerantworten nicht benotet werden, da Effekte wie beispielsweise Aufregung und Versagensangst vermieden werden sollten. Jede Lehrkraft kann entsprechend der inhaltlichen Ausrichtung des Unterrichts nur einzelne Teilaufgaben auswählen bzw. die Aufgaben modifizieren. Ferner kann je nach den organisatorischen Vorrausetzungen eine Zeitspanne von 45 oder 90 Minuten gewählt werden.

Die unterrichtende Lehrkraft korrigiert die Antworten der Schüler und ermittelt für jede Teilaufgabe die Anzahl an Aufgaben, die gelöst, teilweise gelöst bzw. nicht gelöst wurden. Anschließend wird für jede Teilaufgabe das Korrekturergebnis in Beziehung zum Erwartungshorizont gesetzt. Dabei sollte ein besonderes Augenmerk auf Auffälligkeiten wie z. B. typische Fehler gelegt werden. Eine differenziertere Sichtweise entsteht durch die Auswertung der drei Niveaustufen. Darüber hinaus können individuelle Hinweise der Schüler ausgewertet werden, die sie in den nebenstehenden Tabellen vermerkt haben. Schließlich können Schlussfolgerungen zum Lernstand der Schüler sowie zum Unterricht und dessen Fortentwicklung gezogen werden.

Referenzen

[1] THÜRINGER KULTUSMINISTERIUM (Hrsg.) (2011): Lehrplan für den Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife, Mathematik.

[2] SEKRETARIAT DER STÄNDIGEN KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER LÄNDER IN DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND (Hrsg.) (2013): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012.

[3] FOTHE, M; LUDWIG, H.; KÜSPERT, K.; WENZEL, M. (2006): Unterrichtsreflexion mit ungewöhnlichen Mitteln. LOG IN Nr. 141/142. S.52-63

Aufgabe 1: Wie kriege ich die Kurve?

Themengebiet	*Analysis – Differenzieren stetiger Funktionen*

Klassenstufe	*11*

Kurzbeschreibung	*Vielleicht haben Sie auch schon einmal beobachtet, wie ein Modellrennauto aus der Bahn geschleudert wird. Man könnte jetzt annehmen, dass es einfach zu schnell gewesen war. Wenn man den Vorgang aber ein paar Mal wiederholt, fällt etwas auf: Es ist in den meisten Fällen eine bestimmte Stelle, an der die Modellautos die Bahn verlassen. Oft handelt es sich dabei um einen Übergang zwischen einer Geraden und einer Kurve. An diesem Punkt wird es spannend!* *Bei den anschließenden Überlegungen hilft die Differentialrechnung weiter.*

Lehrplanbezüge	*...ein CAS zum algebraischen und numerischen Differenzieren von Funktionen nutzen.* *...notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extrem- und Wendepunkte anwenden.* *...inner- und außermathematische Problemstellungen mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung bearbeiten.* *...selbständig und in kooperativen Lernformen komplexe Problemstellungen zur Differenzial- und Integralrechnung bearbeiten.*

Mathematische Leitideen	*Funktionaler Zusammenhang* *Algorithmus und Zahl*

Vorschlag zur Zuordnung der Mathematischen Kompetenzen

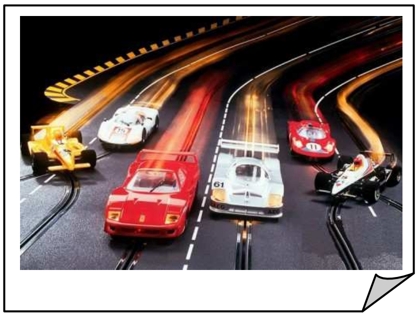
Aufgabe	Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	Mathematisch Kommunizieren
A1		x	x		x	
A2	x				x	
A3	x				x	
A4		x	x	x	x	
Z1	x			x		x

Referenzen

WÜLLNER, S.; PALLACK, A. (2008): Gleisarbeiten. In: PALLACK, A.; BARZEL, B. (2008) T³-AKZENTE … aller Anfang ist leicht – Aufgaben mit TI-Nspire/ TI-Nspire CAS. Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Zentrum für Lehrerbildung. S.59-62.

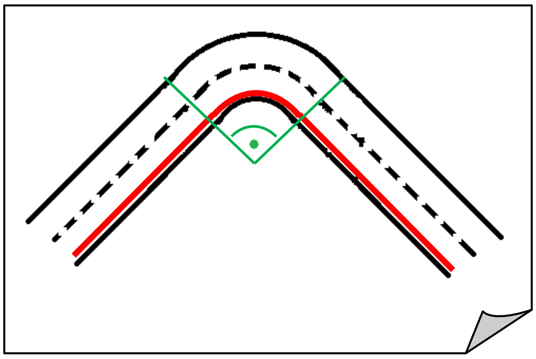
BAUMANN, A. (2011): Eine kritische Betrachtung zum Thema „Modellierungsaufgaben" anhand von Beispielen aus dem hessischen Mathematik-Abitur 2009. Mathematikinformationen. Nr. 55. S.15-23.

N1 Wie kriege ich die Kurve?



Paul beobachtet bei seiner Modellautorennbahn, dass die Autos bei hohen Geschwindigkeiten immer an derselben Stelle aus der Bahn geschleudert werden. Diese Stelle ist genau der Übergang von einer Kurve auf eine lange Gerade.

Bei genauerer Untersuchung der Bauteile kann Paul feststellen, dass es sich dabei um eine 90°-Kurve handelt. Diese Kurve entspricht genau einem Viertelkreis. Die verbundenen Geraden-Stücke sind auch wirklich gerade. Paul macht sich eine Skizze von den drei Bauteilen seiner Modellrennbahn:



Anhand der Skizze kann Paul erkennen, dass die drei Bauteile durch die Graphen dreier Funktionsgleichungen beschrieben werden können.

☹	😐	☺

A1 Gib drei Funktionsgleichungen mit den dazugehörigen Definitionsbereichen an, deren Graphen z.B. die untere Fahrbahnbegrenzung (rote Linien) beschreiben.

<u>Hinweis:</u>

Einen Kreisbogen kann man mit Hilfe des *Satzes des Pythagoras* beschreiben; Es gilt $x^2 + y^2 = r^2$, wobei r der Radius des Kreises ist. Wenn man nach y umstellt, erhält man folgende Funktion: $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad , -r \leq x \leq r$

Paul fragt sich, warum die Modellautos von der Bahn geschleudert werden. Die Verbindungsstücke passen nahtlos zusammen, daran kann es nicht liegen, aber vielleicht haben die Modellautos die falsche Richtung, wenn sie die Kreisbahn verlassen. Paul will herausfinden, ob die Tangenten der Kreisbahn an den Übergängen mit den Geraden übereinstimmen.

A2 Bestimme die ersten Ableitungen der drei Funktionsgleichungen und vergleiche sie an den beiden Verbindungsstellen.

Um dem Geheimnis auf den Grund gehen zu können, bestimmt Paul noch die zweiten Ableitungen der drei Funktionen, denn er hat in der Schule gelernt, dass die zweite Ableitung etwas über die Krümmung der Kurve aussagt.

A3 Bestimme die zweiten Ableitungen der drei Funktionsgleichungen und vergleiche sie an den beiden Verbindungsstellen.

Paul fragt sich, welche Funktion die Kurve beschreiben würde und neben den bisherigen Eigenschaften (Funktionswerte an den Verbindungstellen stimmen überein, Erste Ableitungen an den Verbindungstellen stimmen überein) auch die Eigenschaft besitzt, dass die zweite Ableitung an den Verbindungstellen übereinstimmen.

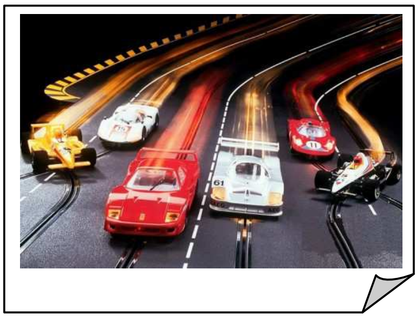
A4 **Finde eine Funktionsgleichung, die alle Sechs eben genannten Eigenschaften besitzt.**

<u>Zusatz:</u>

Arne überlegt sich, nachdem er die Gleichung gefunden hat, ob er den Funktionsgraphen nur verschieben muss, wenn er die Funktionen für die äußeren Begrenzungslinien der Fahrbahn erhalten möchte. Natürlich sollten die beiden Funktionsgraphen immer denselben Abstand zueinander aufweisen.

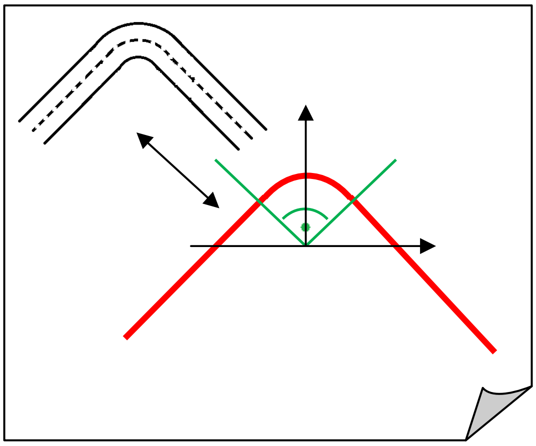
Z1 **Besitzen zwei Funktionsgraphen immer denselben Abstand, wenn der eine durch Verschiebung aus dem andren hervorgeht? Begründe deine Entscheidung.**

N2 Wie kriege ich die Kurve?



Paul beobachtet bei seiner Modellautorennbahn, dass die Autos bei hohen Geschwindigkeiten immer an derselben Stelle aus der Bahn geschleudert werden. Diese Stelle ist genau der Übergang von einer Kurve auf eine lange Gerade.

Bei genauerer Untersuchung der Bauteile kann Paul feststellen, dass es sich dabei um eine 90°-Kurve handelt. Diese Kurve entspricht genau einem Viertelkreis. Die verbundenen Geraden-Stücke sind auch wirklich gerade. Paul macht sich eine Skizze von den drei Bauteilen seiner Modellrennbahn:



Anhand der Skizze kann Paul erkennen, dass die drei Bauteile durch die Graphen dreier Funktionsgleichungen beschrieben werden können.

☹	😐	☺

A1 Gib drei Funktionsgleichungen mit den dazugehörigen Definitionsbereichen an, deren Graphen die obigen Bauteile beschreiben.

<u>Hinweis:</u>

Einen Kreisbogen kann man mit Hilfe des *Satzes des Pythagoras* beschreiben; Es gilt $x^2 + y^2 = r^2$, wobei r der Radius des Kreises ist. Wenn man den Kreismittelpunkt in den Koordinatenursprung legt, ergeben sich die Schnittpunkte (-1; 1) und (1; 1). Stellt man die Kreisgleichung nach y um, ergibt sich folgende Funktion: $y(x) = \sqrt{2 - x^2} \quad , -1 \leq x \leq 1$

Paul fragt sich, warum die Modellautos von der Bahn geschleudert werden. Die Verbindungsstücke passen nahtlos zusammen, daran kann es nicht liegen, aber vielleicht haben die Modellautos die falsche Richtung, wenn sie die Kreisbahn verlassen. Paul will herausfinden, ob die Tangenten der Kreisbahn an den Übergängen mit den Geraden übereinstimmen.

A2 Bestimme die ersten Ableitungen der drei Funktionsgleichungen und vergleiche sie an den beiden Verbindungsstellen.

Um dem Geheimnis auf den Grund gehen zu können, bestimmt Paul noch die zweiten Ableitungen der drei Funktionen, denn er hat in der Schule gelernt, dass die zweite Ableitung etwas über die Krümmung der Kurve aussagt.

A3 **Bestimme die zweiten Ableitungen der drei Funktionsgleichungen und vergleiche sie an den beiden Verbindungsstellen.**

Paul fragt sich, welche Funktion die Kurve beschreiben würde und neben den bisherigen Eigenschaften (Funktionswerte an den Verbindungstellen stimmen überein, Erste Ableitungen an den Verbindungstellen stimmen überein) auch die Eigenschaft besitzt, dass die zweite Ableitung an den Verbindungstellen übereinstimmen.

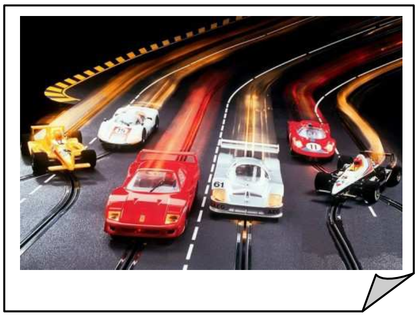
A4 **Finde eine Funktionsgleichung, die alle Sechs eben genannten Eigenschaften besitzt.**

<u>Zusatz:</u>

Arne überlegt sich, nachdem er die Gleichung gefunden hat, ob er den Funktionsgraphen nur verschieben muss, wenn er die Funktionen für die äußeren Begrenzungslinien der Fahrbahn erhalten möchte. Natürlich sollten die beiden Funktionsgraphen immer denselben Abstand zueinander aufweisen.

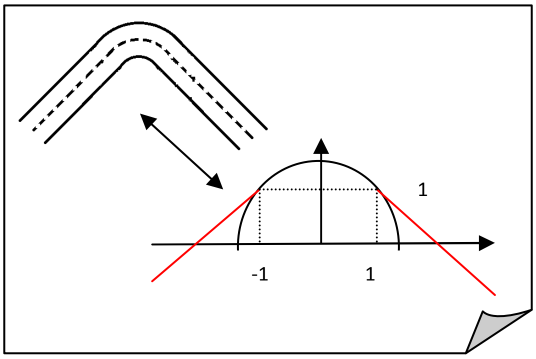
Z1 **Wenn man einen Funktionsgraphen verschiebt, ist dann der neue Graph parallel zum alten Graphen? Begründe deine Entscheidung.**

N3 Wie kriege ich die Kurve?



Paul beobachtet bei seiner Modellautorennbahn, dass die Autos bei hohen Geschwindigkeiten immer an derselben Stelle aus der Bahn geschleudert werden. Diese Stelle ist genau der Übergang von einer Kurve auf eine lange Gerade.

Bei genauerer Untersuchung der Bauteile kann Paul feststellen, dass es sich dabei um eine 90°-Kurve handelt. Diese Kurve entspricht genau einem Kreissegment. Die verbundenen Geraden-Stücke sind auch wirklich gerade. Paul macht sich eine Skizze von den drei Bauteilen seiner Modellrennbahn:



Anhand der Skizze kann Paul erkennen, dass die drei Bauteile durch die Graphen dreier Funktionsgleichungen beschrieben werden können.

☹	😐	☺

A1 Gib drei Funktionsgleichungen mit den dazugehörigen Definitionsbereichen an, deren Graphen die obigen Bauteile beschreiben.

Hinweis:

Einen Kreisbogen kann man mit Hilfe des *Satzes des Pythagoras* beschreiben; Es gilt $x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$, wobei $\sqrt{2}$ der Radius des Kreises ist. Dabei legt man den Kreismittelpunkt in den Koordinatenursprung und es ergeben sich die Schnittpunkte (-1; 1) und (1; 1). Stellt man die Kreisgleichung nach y um, ergibt sich folgende Funktion: $y(x) = \sqrt{2 - x^2} \quad , -1 \leq x \leq 1$

Paul fragt sich, warum die Modellautos von der Bahn geschleudert werden. Die Verbindungsstücke passen nahtlos zusammen, daran kann es nicht liegen, aber vielleicht haben die Modellautos die falsche Richtung, wenn sie die Kreisbahn verlassen. Paul will herausfinden, ob die Tangenten der Kreisbahn an den Übergängen mit den Geraden übereinstimmen.

A2 Bestimme die ersten Ableitungen der drei Funktionsgleichungen und vergleiche sie an den beiden Verbindungsstellen.

Um dem Geheimnis auf den Grund gehen zu können, bestimmt Paul noch die zweiten Ableitungen der drei Funktionen, denn er hat in der Schule gelernt, dass die zweite Ableitung etwas über die Krümmung der Kurve aussagt.

A3 Bestimme die zweiten Ableitungen der drei Funktionsgleichungen und vergleiche sie an den beiden Verbindungsstellen.

Paul fragt sich, welche Funktion die Kurve beschreiben würde und neben den bisherigen Eigenschaften (Funktionswerte an den Verbindungstellen stimmen überein, Erste Ableitungen an den Verbindungstellen stimmen überein) auch die Eigenschaft besitzt, dass die zweite Ableitung an den Verbindungstellen übereinstimmen.

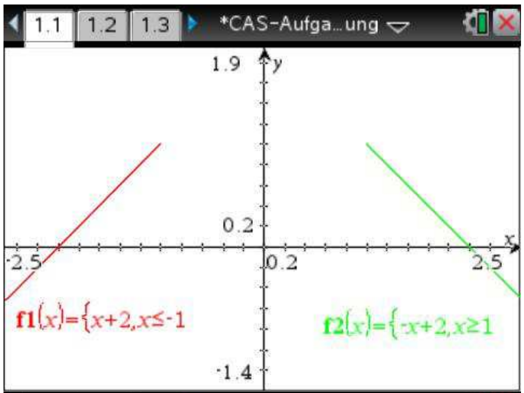
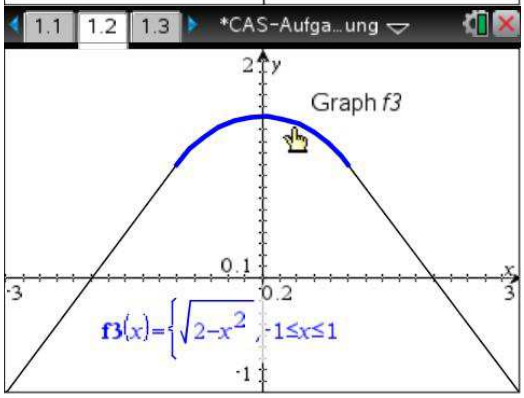
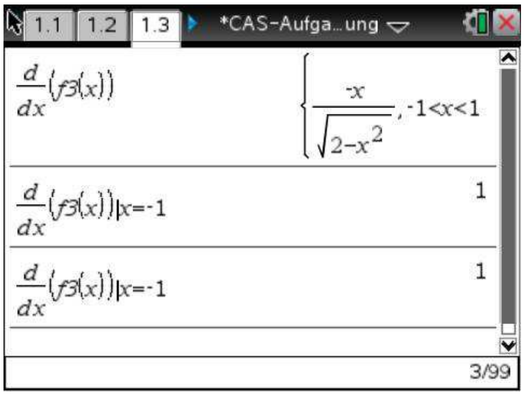
A4 Finde eine Funktionsgleichung, die alle Sechs eben genannten Eigenschaften besitzt.

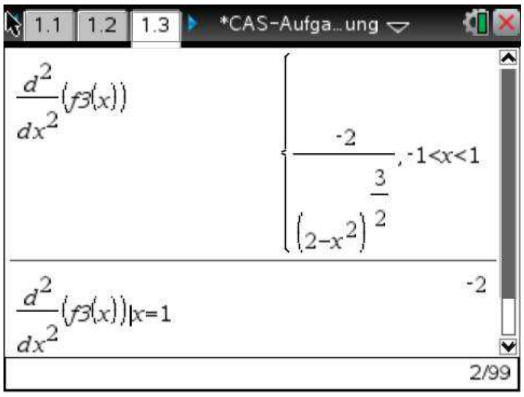
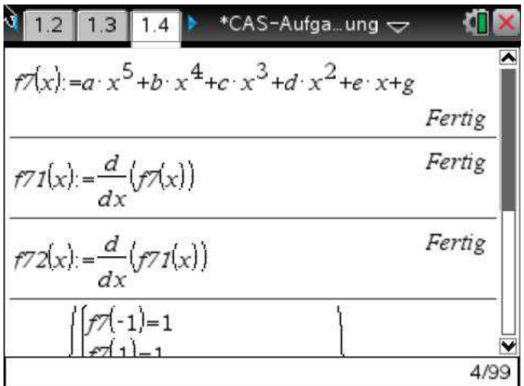
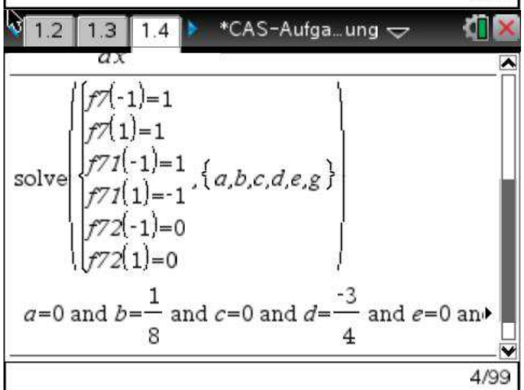
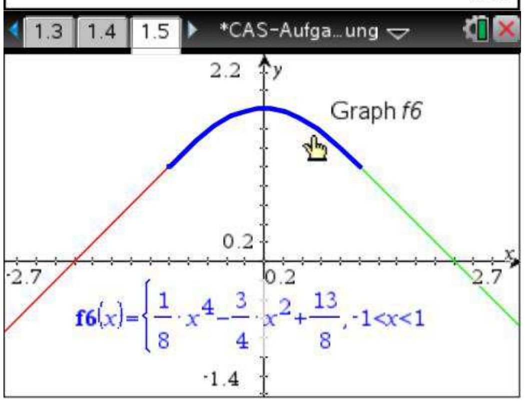
Hinweis:

Gesucht ist ein Polynom 5. Grades, dass im Allgemeinen wie folgt beschrieben werden kann: $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g$.

Um die sechs Parameter zu bestimmen benötigt man die obigen sechs Bedingungen. Das führt zu einem linearen Gleichungssystem mit sechs Gleichungen und sechs Unbekannten.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Wie kriege ich die Kurve?

Aufgabe	Lösungshinweis	Screenshot (Beispiel)
A1	Die Kurve soll mit Hilfe der Graphen zweier linearer Funktionen und einem Kreisbogen beschrieben werden. Wie in der Aufgabe N3 schon angedeutet ist, wird das Koordinatensystem so gewählt, dass der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung liegt. Es ergeben sich die folgenden Funktionstherme: $f_1(x) = x + \sqrt{2}r \quad \text{für } x \leq \frac{-r}{\sqrt{2}}$ $f_2(x) = -x + \sqrt{2}r \quad \text{für } x \geq \frac{r}{\sqrt{2}}$ $f_3(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{für } \frac{-r}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$ Wenn man wie in den Aufgaben N2 und N3 $r = \sqrt{2}$ setzt, erhält man die Funktionstherme: $f_1(x) = x + 2 \quad \text{für } x \leq -1$ $f_2(x) = -x + 2 \quad \text{für } x \geq 1$ $f_3(x) = \sqrt{2 - x^2} \quad \text{für } -1 \leq x \leq 1$	
A2	Die ersten Ableitungen der Funktionen können mit Hilfe eines CAS schnell bestimmt werden: $f_1'(x) = 1$ und $f_2'(x) = -1$ $f_3'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ bzw. $f_3'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}}$ Vergleicht man die ersten Ableitungen an den Verbindungspunkten, fällt auf, dass sie paarweise übereinstimmen: $f_3'\left(\frac{-r}{\sqrt{2}}\right) = 1 = f_1'\left(\frac{-r}{\sqrt{2}}\right) \; f_3'\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = -1 = f_2'\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ Damit ist gezeigt, dass die Autos die richtige Richtung haben, wenn sie in die Kurve fahren bzw. die Kurve verlassen. Das kann nicht der Grund für das Verlassen der Fahrbahn sein.	

A3	Die zweiten Ableitungen können mit Hilfe eines CAS schnell bestimmt werden: $f_1''(x) = f_2''(x) = 0$ $f_3''(x) = \frac{-r^2}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}}$; $f_3''(x) = \frac{-2}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$ Vergleicht man die zweiten Ableitungen an den Verbindungspunkten, fällt auf, dass sie nicht übereinstimmen: $f_3''\left(\frac{-r}{\sqrt{2}}\right) \neq 0 = f_1''\left(\frac{-r}{\sqrt{2}}\right)$ $f_3''\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \neq 0 = f_2''\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ Die Krümmung des Kreises stimmt nicht mit der Krümmung der Geraden überein. Damit werden die Fliehkräfte an diesen Punkten unendlich groß und treiben die Rennautos aus der Bahn.	
A4 **und** **Z1**	Wie in Aufgabe N3 skizziert kann die gesucht Funktion durch ein Polynom 5. Grades bestimmt werden: $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g$ Mit den sechs Bedingungen (zwei Punkte, zwei Anstiege an zwei Stellen, zwei Wendepunkte) kann ein Gleichungssystem mit sechs Gleichungen aufgestellt werden. Somit können die sechs Parameter a bis g eindeutig bestimmt werden. Die Berechnung kann einem CAS überlassen werden. Wenn ein Funktionsgraph verschoben wird, dann haben die beiden Graphen im Allgemeinen nicht denselben Abstand zueinander. Ein einfaches Beispiel bietet die Normalparabel ($f(x) = x^2$). Wird diese um eine Einheit verschoben ($f^*(x) = x^2 + 1$), dann sind die Abstände zwischen den Funktionsgraphen nicht überall gleich. Für die Rennstrecke bedeutet das, dass die gefundene Funktion nicht nur verschoben werden kann, um die Ränder der Fahrbahn zu beschreiben. Für jeden Rand muss eine entsprechende Funktion bestimmt werden.	  

Aufgabe 2: Können Hunde differenzieren?

Themengebiet	*Analysis - Extremwertprobleme*

Klassenstufe	*11*

Kurzbeschreibung	*Es ist immer wieder spannend, wenn in Medien über mathematische Inhalte berichtet wird oder sogar Problemstellungen mithilfe mathematischer Werkzeuge diskutiert werden:* *Im vorliegenden Beispiel wurde auf* ***SPIEGEL ONLINE Wissenschaft*** *über einen kuriosen Fall berichtet. Einem Herrchen (natürlich ein Mathematiker) war aufgefallen, dass sein Hund auf der Jagd nach dem Ball immer den schnellsten Weg einschlug. Diesen optimalen Weg zu finden, ist alles andere als trivial. Die mathematische Modellierung führt zu einem Extremwertproblem. Um dieses zu Lösen, muss man Differenzieren können – Doch können Hunde wirklich differenzieren?* *In jedem Fall ist die mathematische Herleitung, die im Artikel vorgestellt wird, interessant und es ist lohnenswert, sich mit ihr auseinanderzusetzen.*

Lehrplanbezüge	*...Extremwertprobleme lösen.* *...notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extrem- und Wendepunkte anwenden.* *...Lösungswege verständlich, angemessen und nachvollziehbar auch unter Verwendung geeigneter Medien erläutern und präsentieren.* *...Informationen aus mathematischen Sachtexten und aus Computerdarstellungen entnehmen und Anderen verständlich erläutern.*

Mathematische Leitideen	*Funktionaler Zusammenhang* *Algorithmus und Zahl*

Vorschlag zur Zuordnung der Mathematischen Kompetenzen

Aufgabe	Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	Mathematisch Kommunizieren
A1			x	x		
A2	x	x	x		x	x
A3		x		x	x	
A4	x					x

Referenzen

http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,811138,00.html 17.05.2013

N1 Können Hunde differenzieren?

Auf der Internetseite *SPIEGEL ONLINE Wissenschaft* wurde am 06.02.2012 der Artikel „*Hund als Mathegenie – Pi mal Pfote*“ online gestellt. Im Folgenden werden Ausschnitte davon vorgestellt:

[…] Aber können Tiere sogar Funktionen differenzieren? Also berechnen, wie steil die Kurve in einem Diagramm steigt oder fällt? Der Vierbeiner Elvis scheint der lebende Beweis dafür zu sein. Er ist ein Zwerghund der Rasse Welsh Corgi. Dass Elvis überhaupt Gegenstand wissenschaftlicher Publikationen wurde, verdankt er seinem Herrchen Tim Pennings.

Pennings ist Mathematiklehrer am Hope College in der US-amerikanischen Kleinstadt Holland am Lake Michigan. Regelmäßig macht Pennings mit Elvis ausgiebige Spaziergänge am Ufer des riesigen Sees, und stets ist das Lieblingsspielzeug des Hundes dabei, ein Tennisball.

Pennings läuft am Strand meist direkt an der Wasserlinie entlang und wirft den Ball dann schräg ins Wasser. Dabei ist dem Mathelehrer aufgefallen, dass Elvis nie auf direktem Weg zu seinem Lieblingsspielzeug paddelt, sondern erst einige Meter über den trockenen Sand spurtet, bevor er dann relativ scharf Richtung Wasser abbiegt und die letzten Meter schwimmt.

Clevere Wahl

Als Mathematiker begann Pennings zu grübeln, warum Elvis diesen ja keinesfalls direkten Weg nimmt. Und schnell war klar: Der Hund läuft extra lange am Strand, weil er viel schneller laufen als schwimmen kann und so womöglich den Ball in kürzerer Zeit erreicht, als wenn er auf direktem Wege schwimmen würde. Pennings analysierte das Problem und stellte fest: Um den schnellsten Weg zu finden, muss man eigentlich Differentialrechnung beherrschen, denn der zeitlich kürzeste Weg ist das Minimum einer Funktion, von dem keiner auf Anhieb sagen kann, wo es liegt.

Um es kurz zu machen: Tatsächlich wählte Elvis in 35 eigens von Pennings durchgeführten Versuchen fast immer einen Weg, der dem Optimum sehr nahe kam. Aber kann Elvis deshalb tatsächlich differenzieren, also ausrechnen, wie steil die Kurve einer Funktion steigt oder fällt? Das ist kaum vorstellbar.

Wahrscheinlich hat Elvis einfach nur ein gutes Gefühl dafür, wie er am schnellsten zum geliebten Tennisball kommt. Er ist ja schon oft über den Strand getollt und durchs Wasser gepaddelt und hat dabei seine Erfahrungen gesammelt. Womöglich handelt es sich auch um eine Art mathematischen Instinkt, ein Erbe der Evolution, das Tieren dabei hilft, sich möglichst schnell durchs Gelände zu bewegen. […]

http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,811138,00.html 07.02.2012

☹	😐	☺

A1 **Lies dir den Artikel genau durch und zeichne eine Skizze des Sachverhaltes.**

A2 **Versuche die Argumentation aus dem Artikel nachzuvollziehen und beschreibe, wie du bei der Berechnung vorgehen würdest.**
Nehme Stellung zu dem Satz aus dem Artikel: *„Man muss in der Tat differenzieren können.“*

A3 **Bestimme die Stelle, an der Elvis am Strand abbiegt und in Richtung Ball schwimmt.**

N2 Können Hunde differenzieren?

Auf der Internetseite *SPIEGEL ONLINE Wissenschaft* wurde am 06.02.2012 der Artikel „*Hund als Mathegenie – Pi mal Pfote*" online gestellt. Im Folgenden werden Ausschnitte davon vorgestellt:

[…] Aber können Tiere sogar Funktionen differenzieren? Also berechnen, wie steil die Kurve in einem Diagramm steigt oder fällt? Der Vierbeiner Elvis scheint der lebende Beweis dafür zu sein. Er ist ein Zwerghund der Rasse Welsh Corgi. Dass Elvis überhaupt Gegenstand wissenschaftlicher Publikationen wurde, verdankt er seinem Herrchen Tim Pennings. Regelmäßig macht Pennings mit Elvis ausgiebige Spaziergänge am Ufer des riesigen Sees, und stets ist das Lieblingsspielzeug des Hundes dabei, ein Tennisball. Pennings läuft am Strand meist direkt an der Wasserlinie entlang und wirft den Ball dann schräg ins Wasser. Dabei ist dem Mathelehrer aufgefallen, dass Elvis nie auf direktem Weg zu seinem Lieblingsspielzeug paddelt, sondern erst einige Meter über den trockenen Sand spurtet, bevor er dann relativ scharf Richtung Wasser abbiegt und die letzten Meter schwimmt.

Clevere Wahl

Als Mathematiker begann Pennings zu grübeln, warum Elvis diesen ja keinesfalls direkten Weg nimmt. Und schnell war klar: Der Hund läuft extra lange am Strand, weil er viel schneller laufen als schwimmen kann und so womöglich den Ball in kürzerer Zeit erreicht, als wenn er auf direktem Wege schwimmen würde. Pennings analysierte das Problem und stellte fest: Um den schnellsten Weg zu finden, muss man eigentlich Differentialrechnung beherrschen, denn der zeitlich kürzeste Weg ist das Minimum einer Funktion, von dem keiner auf Anhieb sagen kann, wo es liegt. Um es kurz zu machen: Tatsächlich wählte Elvis in 35 eigens von Pennings durchgeführten Versuchen fast immer einen Weg, der dem Optimum sehr nahe kam. Aber kann Elvis deshalb tatsächlich differenzieren, also ausrechnen, wie steil die Kurve einer Funktion steigt oder fällt? Das ist kaum vorstellbar. Wahrscheinlich hat Elvis einfach nur ein gutes Gefühl dafür, wie er am schnellsten zum geliebten Tennisball kommt. Er ist ja schon oft über den Strand getollt und durchs Wasser gepaddelt und hat dabei seine Erfahrungen gesammelt.

Wie ein Mathematiker den Weg von Elvis berechnet

Wie viel Mathematik steckt hinter den vom Zwerghund gewählten Wegen? Man muss in der Tat differenzieren können. Elvis steht an Punkt A, der Tennisball schwimmt im Wasser an Punkt B. Um die Zeit auszurechnen, die Elvis bis zum Ball braucht, müssen wir seinen Weg sowie seine Lauf- und Schwimmgeschwindigkeit kennen. Tim Pennings hat bei seiner Untersuchung ermittelt, dass Elvis mit 6,4 Metern pro Sekunde rennt und mit 0,9 Metern pro Sekunde schwimmt. […]

http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,811138,00.html 07.02.2012

☹	😐	☺

A1 **Lies dir den Artikel genau durch und zeichne eine Skizze des Sachverhaltes.**

A2 **Versuche die Argumentation aus dem Artikel nachzuvollziehen und beschreibe, wie du bei der Berechnung vorgehen würdest.**

A3 **Bestimme die Stelle, an der Elvis am Strand abbiegt und in Richtung Ball schwimmt.**

Hinweis:

Für die Betrachtung kann man dem Standort des Balles z.B. die Koordinaten (20;10) zuordnen.

N3 Können Hunde differenzieren?

Auf der Internetseite *SPIEGEL ONLINE Wissenschaft* wurde am 06.02.2012 der Artikel „*Hund als Mathegenie – Pi mal Pfote*" online gestellt. Im Folgenden werden Ausschnitte davon vorgestellt:

[…] Aber können Tiere sogar Funktionen differenzieren? Der Vierbeiner Elvis scheint der lebende Beweis dafür zu sein. Regelmäßig macht Tim Pennings mit Elvis ausgiebige Spaziergänge am Ufer des riesigen Sees, und stets ist das Lieblingsspielzeug des Hundes dabei, ein Tennisball. Pennings läuft am Strand meist direkt an der Wasserlinie entlang und wirft den Ball dann schräg ins Wasser. Dabei ist dem Mathelehrer aufgefallen, dass Elvis nie auf direktem Weg zu seinem Lieblingsspielzeug paddelt, sondern erst einige Meter über den trockenen Sand spurtet, bevor er dann relativ scharf Richtung Wasser abbiegt und die letzten Meter schwimmt.

Clevere Wahl

Um den schnellsten Weg zu finden, muss man eigentlich Differentialrechnung beherrschen. Um es kurz zu machen: Tatsächlich wählte Elvis in 35 eigens von Pennings durchgeführten Versuchen fast immer einen Weg, der dem Optimum sehr nahe kam. Aber kann Elvis deshalb tatsächlich differenzieren? Das ist kaum vorstellbar. Wahrscheinlich hat Elvis einfach nur ein gutes Gefühl dafür, wie er am schnellsten zum geliebten Tennisball kommt.

Wie ein Mathematiker den Weg von Elvis berechnet

Elvis steht an Punkt A, der Tennisball schwimmt im Wasser an Punkt B. Um die Zeit auszurechnen, die Elvis bis zum Ball braucht, müssen wir seinen Weg sowie seine Lauf- und Schwimmgeschwindigkeit kennen. Er rennt vom Startpunkt A über den Strand bis zum Punkt D. Diese Strecke hat die Länge z-y. Dann schwimmt er von D zu B. Nach dem Satz des Pythagoras ist diese Strecke die Wurzel aus ($x^2 + y^2$). Die Laufgeschwindigkeit bezeichnen wir mit g, die Schwimmgeschwindigkeit mit s. Weil Zeit = Weg/Geschwindigkeit ist, erhalten wir für die Gesamtzeit folgende Formel:

$$T(y) = (z-y)/g + \text{Wurzel}(x^2 + y^2)/s$$

Wir suchen das Minimum dieser Funktion und berechnen deshalb ihre erste Ableitung:

$$T'(y) = -1/g + y/(s^* \text{ Wurzel}(x^2 + y^2))$$

Das Minimum der Funktion muss bei T'(y) = 0 liegen.
Als Lösung erhalten wir dann:

$$y = x/\text{Wurzel}(g^2/s^2-1)$$

Tim Pennings hat bei seiner Untersuchung ermittelt, dass Elvis mit 6,4 Metern pro Sekunde rennt und mit 0,9 Metern pro Sekunde schwimmt.

http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,811138,00.html 07.02.2012

☹	😐	☺

A1 Lies dir den Artikel genau durch und zeichne eine Skizze des Sachverhaltes.

A2 Versuche die Rechnung aus dem Artikel nachzuvollziehen.

A3 Gib die Stelle an, an der Elvis am Strand abbiegt und in Richtung Ball schwimmt.

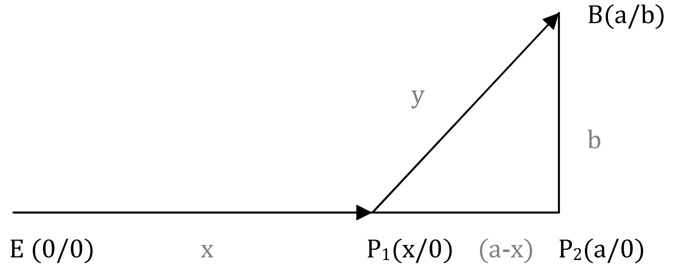
A4 Gib an, was zu einer vollständigen mathematischen Betrachtung noch fehlt.

Hinweis:

Für die Betrachtung kann man dem Standort des Balles z.B. die Koordinaten (20; 10) zuordnen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Können Hunde differenzieren?

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Lösungshinweis</th><th>Screenshot (Beispiel)</th></tr>
<tr><td>A1</td><td colspan="2">



E … Start von Elvis
x … Laufstrecke von Elvis an Land
B … Standort des Balles im Wasser
y … Schwimmstrecke von Elvis im Wasser
v_x … Laufgeschwindigkeit von Elvis
v_y … Schwimmgeschwindigkeit von Elvis

</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>

Es handelt sich um eine Extremwertaufgabe, die wie folgt gelöst werden kann, ein CAS hilft bei den Umformungen:

$$t(x,y) \rightarrow \min.$$

$$t(x,y) = t_x + t_y = \frac{x}{v_x} + \frac{y}{v_y}$$

$$t(x) = \frac{x}{v_x} + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}{v_y}$$

$$t´(x) = \frac{1}{v_x} + \frac{(x-a)}{v_y \cdot \sqrt{(a-x)^2 + b^2}}$$

$$t`(x) = 0 = \frac{v_y \cdot \sqrt{(a-x)^2 + b^2} + v_x \cdot (x-a)}{v_x \cdot v_y \cdot \sqrt{(a-x)^2 + b^2}}$$

$$0 = v_y \cdot \sqrt{(a-x)^2 + b^2} + v_x \cdot (x-a)$$

$${v_x}^2 \cdot (a-x)^2 = {v_y}^2 \cdot ((a-x)^2 + b^2)$$

$$\left({v_x}^2 - {v_y}^2\right) \cdot (a-x)^2 = {v_y}^2 \cdot b^2$$

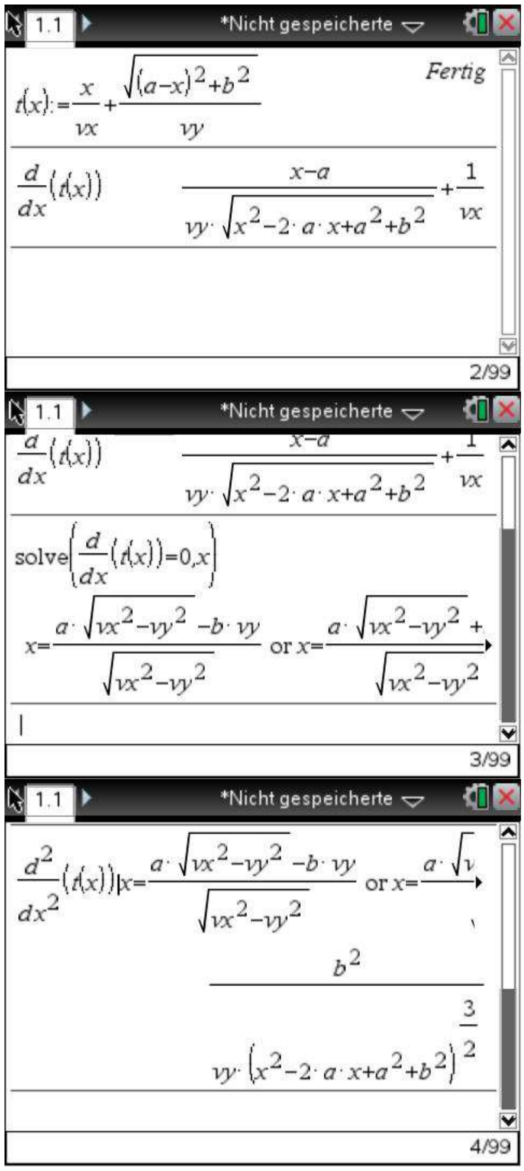
$$x = a \pm \frac{v_y \cdot b}{\sqrt{{v_x}^2 - {v_y}^2}}$$

$$t´´\left(a - \frac{v_y \cdot b}{\sqrt{{v_x}^2 - {v_y}^2}}\right) > 0 \quad \rightarrow \quad \textit{Mininmum}$$

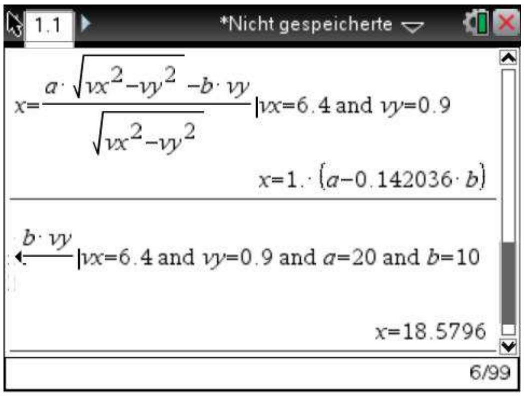
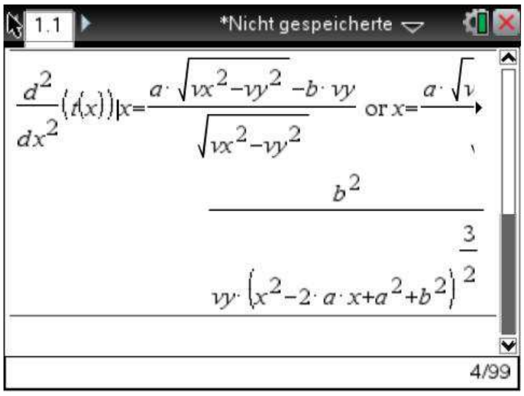
In den Aufgaben N2 und N3 sind konkrete Werte für v_x, v_y und für B gegeben. Diese kann man zu Beginn, oder am Ende der Berechnung einsetzen. Wenn man ein CAS zur Verfügung hat, kann man damit bis zum Schluss warten. Die Terme bleiben so übersichtlicher:

$v_x = 6{,}4\,\frac{m}{s}$ $\quad v_y = 0{,}9\,\frac{m}{s}$

</td><td>



</td></tr>
</table>

A3	Wenn man die Berechnung in A2 allgemein durchgeführt hat, kann man einfach die gegebenen Werte einsetzen: $v_x = 6{,}4\,\frac{m}{s} \quad v_y = 0{,}9\,\frac{m}{s}$ $x = a - \frac{0{,}9\,\frac{m}{s} \cdot b}{\sqrt{\left(6{,}4\,\frac{m}{s}\right)^2 - \left(0{,}9\,\frac{m}{s}\right)^2}}$ $x = a - 0{,}14 \cdot b$ Unter der Annahme, dass B die Koordinaten (20; 10) hat, biegt Elvis erst nach 18,6 m ab. Es ist beeindruckend, dass Elvis versucht möglichst lange am Strand zu laufen. Das liegt allerdings nur darin begründet, dass er an Land viel schneller ist als im Wasser.	
A4	Bei dem Rechenweg der in Aufgabe N3 von der Internetseite *SPIEGEL ONLINE Wissenschaft* zitiert wird, fehlt der Nachweis des Minimums. Es muss ein Argument angeführt werden, dass es sich bei der vermuteten Extremstelle wirklich um ein Minimum handelt. Oft wird dies mit der zweiten Ableitung gemacht: $t''\left(a - \frac{v_y \cdot b}{\sqrt{{v_x}^2 - {v_y}^2}}\right) > 0 \quad \rightarrow \quad \mathit{Mininmum}$	

Aufgabe 3: Extrem schöne Geometrie.

Themengebiet	*Analysis - Extremwertprobleme*

Klassenstufe	*11*

Kurzbeschreibung	*Oft können praktische Problemstellungen mit geometrischen Zusammenhängen modelliert werden. Bei der ersten Wahlaufgabe ist dies auch der Fall. Das geometrische Objekt, das in der Skizze gezeigt wird, ist eine abstrakte Darstellung eines Eisenkerns (Kreuz), der in einer Spule (Kreis) eingebettet ist. Um die Induktionsströme zu optimieren, sollte der Eisenkern so groß wie möglich sein. Dieses Problem führt zu einer geometrischen Skizze, die auch einen gewissen ästhetischen Wert hat. Aus diesem Grund ist bei den nachfolgenden Aufgaben bewusst auf die Einbettung in einen außermathematischen Kontext verzichtet worden. Nicht zuletzt werden viele innermathematische Probleme aufgrund ihrer Attraktivität und ihres Aufforderungscharakters gelöst.*

Lehrplanbezüge	*...ein CAS zum algebraischen und numerischen Differenzieren von Funktionen nutzen.* *...Extremwertprobleme lösen.* *...inner- und außermathematische Problemstellungen mit Hilfe der Differenzial- und Integralrechnung bearbeiten.* *...mit Ergebnissen und Hinweisen, die das CAS anzeigt, kritisch umgehen und seine Lösungsstrategie ggf. entsprechend verändern.*

Mathematische Leitideen	*Funktionaler Zusammenhang* *Raum und Form* *Algorithmus und Zahl*

Vorschlag zur Zuordnung der Mathematischen Kompetenzen

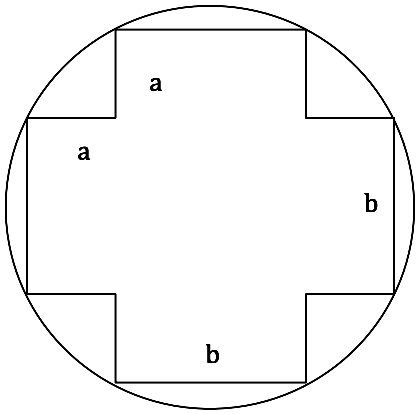
Aufgabe	Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	Mathematisch Kommunizieren
W1.1		x	x		x	
W1.2	x			x		x
W2		x	x		x	

N1 Extrem schöne Geometrie.

Suche dir eine der folgenden beiden Aufgaben aus und löse sie vollständig.

Wahlaufgabe 1:

Es soll die nachstehende geometrische Figur betrachtet werden, dabei handelt es sich um einen Kreis in dem ein Kreuz einbeschrieben ist:



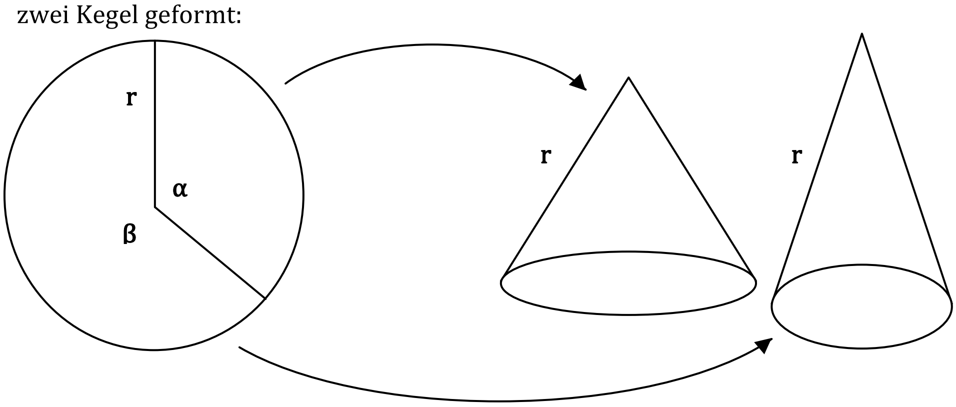
☹	😐	☺

W1.1 **Bestimme die Kantenlängen des Kreuzes so, dass der Flächeninhalt des Kreuzes maximal wird.**

W1.2 **Verändere die Aufgabenstellung dahingehend, dass nicht eine Fläche sondern ein Volumen maximiert werden soll. Beschreibe wie die entsprechenden Körper aussehen müssten und gehe auf eine mögliche Lösungsstrategie ein.**

Wahlaufgabe 2:

Gegeben seien zwei Kreissegmente mit den Winkeln α und β, die zusammen einen vollen Kreis mit dem Radius r ergeben. Aus diesen Kreissegmenten werden zwei Kegel geformt:



☹	😐	☺

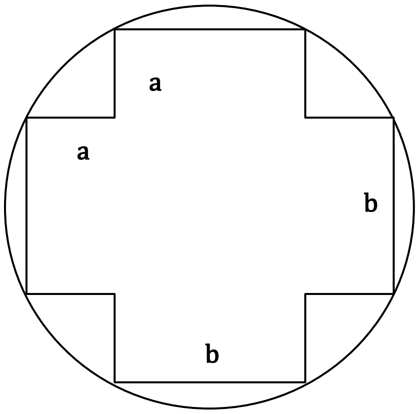
W2 **Bestimme die Winkel α so, dass die Summe der Volumen der beiden Kegel maximal wird.**

N2 Extrem schöne Geometrie.

Suche dir eine der folgenden beiden Aufgaben aus und löse sie vollständig.

<u>Wahlaufgabe 1:</u>

Es soll die nachstehende geometrische Figur betrachtet werden, dabei handelt es sich um einen Kreis in dem ein Kreuz einbeschrieben ist:

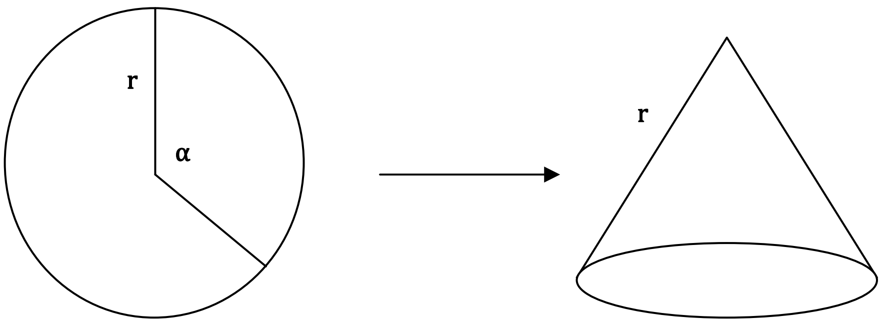


☹	😐	☺

W1 Bestimme die Kantenlängen des Kreuzes so, dass der Flächeninhalt des Kreuzes maximal wird.

<u>Wahlaufgabe 2:</u>

Gegeben sei ein Kreissegment mit dem Winkel α, das aus einem Kreis mit dem Radius r heraus geschnitten wird. Aus diesem Kreissegment wird ein Kegel geformt:



☹	😐	☺

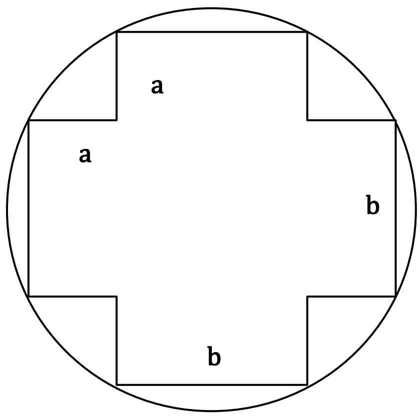
W2 Bestimme den Winkel α so, dass das Volumen des Kegels maximal wird.

N3 Extrem schöne Geometrie.

Suche dir eine der folgenden beiden Aufgaben aus und löse sie vollständig.

<u>Wahlaufgabe 1:</u>

Es soll die nachstehende geometrische Figur betrachtet werden, dabei handelt es sich um einen Kreis in dem ein Kreuz einbeschrieben ist:



☹	😐	☺

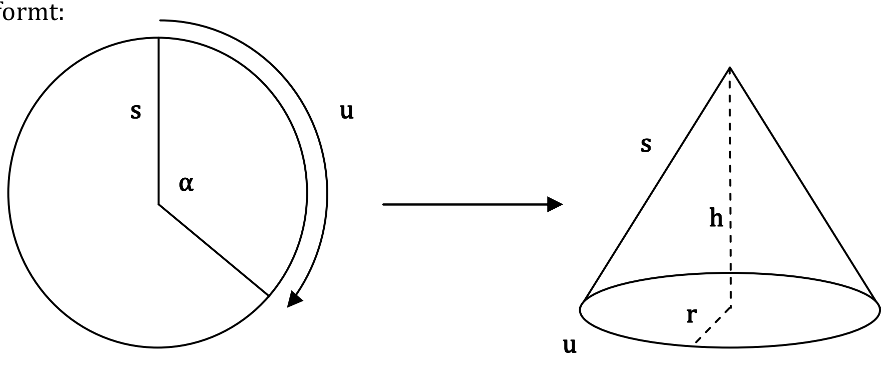
W1 Bestimme die Kantenlängen des Kreuzes so, dass der Flächeninhalt des Kreuzes maximal wird.

<u>Hinweis:</u>

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass der Radius des Kreises 1 beträgt.

<u>Wahlaufgabe 2:</u>

Gegeben sei ein Kreissegment mit dem Winkel α, das aus einem Kreis mit dem Radius r heraus geschnitten wird. Aus diesem Kreissegment wird ein Kegel geformt:



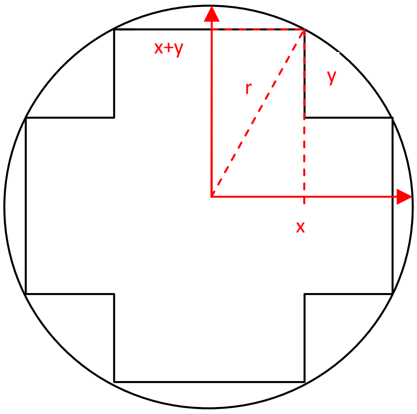
☹	😐	☺

W2 Bestimme den Winkel α so, dass das Volumen des Kegels maximal wird.

<u>Hinweis:</u>

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass der Radius des Kreises $s = 1$ ist.

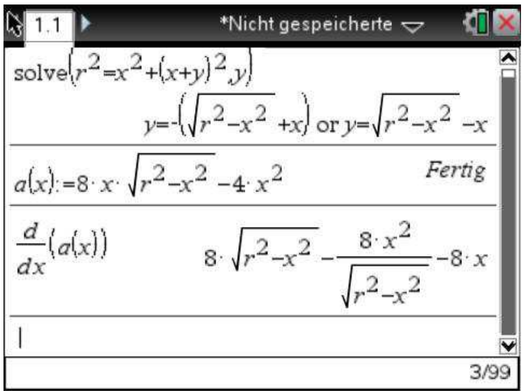
Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Extrem schöne Geometrie.

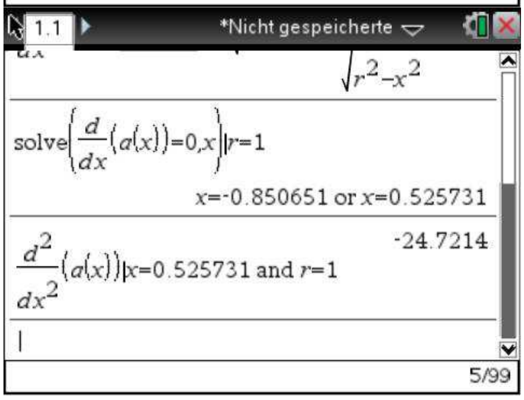
<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Lösungshinweis</th><th>Screenshot (Beispiel)</th></tr>
<tr><td>W1.1</td><td>


Es handelt sich um eine Extremwertaufgabe, die man mittels Differentialrechnung wie folgt lösen kann. Bei den Umformungen hilft ein CAS:

$$A(x,y) \to max.$$
$$A(x,y) = 4 \cdot (x^2 + 2xy)$$
$$r^2 = x^2 + (x+y)^2$$
$$y = \sqrt{r^2 - x^2} - x$$
$$A(x) = 4 \cdot \left(2x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} - x^2\right)$$
$$A'(x) = 4 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 2x\right)$$
$$A'(x) = 0 = (r^2 - x^2) - x^2 - x \cdot \sqrt{r^2 - x^2})$$
$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}} \cdot r$$
$$y_{1,2,3,4} = \left(\sqrt{\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{10}} \mp \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}}\right) \cdot r$$

Achtung: Unter den vier Lösungen gibt es Scheinlösungen. Für r=1 ergeben sich die positiven Näherungswerte:

$$x \approx 0{,}53; y \approx 0{,}32 \text{ mit } A''(x) < 0.$$
</td><td>




</td></tr>
<tr><td>W1.2</td><td>
Das Kreuz und der Kreis können als die Grundflächen eines „Kreuz-Quaders“ und eines Zylinders betrachten werden. Dann könnte man das Volumen des „Kreuz-Quaders“ maximieren. Die dazugehörige Berechnung folgt unmittelbar aus W1.1.

Komplexer wird es, wenn man die Skizze als Aufriss versteht und der „Kreuz-Körper“ in einer Kugel eingeschrieben werden soll. Für die entsprechenden Berechnungen bedarf es höherer Analysis.
</td><td></td></tr>
</table>

W2

Auch hierbei handelt es sich um eine Extremwertaufgabe, die mittels der Differentialrechnung bearbeitet wird. Im Folgenden soll d der Durchmesser des Kegels sein:

$$V(d,h) \rightarrow max.$$

$$V(d,h) = \tfrac{1}{3}\pi \cdot \tfrac{1}{4}d^2 \cdot h$$

$$A_\alpha = \frac{\pi}{360°} \cdot \alpha \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{d}{2} \cdot r = A_M$$

$$d = \frac{2\alpha}{360°} \cdot r$$

$$h = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}d^2}$$

$$V(\alpha) = \tfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{\alpha}{360°} \cdot r\right)^2 \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{\alpha}{360°} \cdot r\right)^2}$$

$$V(\alpha) = \tfrac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \left(\frac{\alpha}{360°}\right)^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{360°}\right)^2}$$

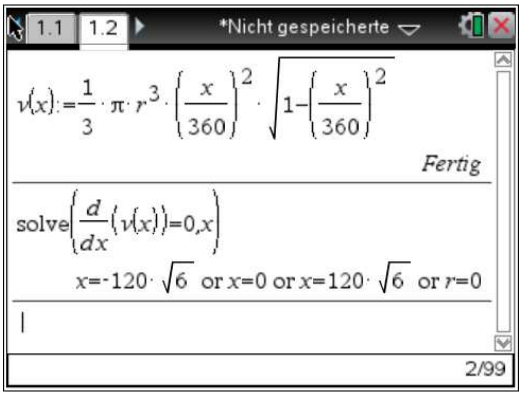
$$V'(\alpha) = \tfrac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \left(\frac{2\alpha}{(360°)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{360°}\right)^2} + \left(\frac{\alpha}{360°}\right)^2 \cdot \frac{-2\alpha}{2 \cdot (360°)^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{360°}\right)^2}}\right)$$

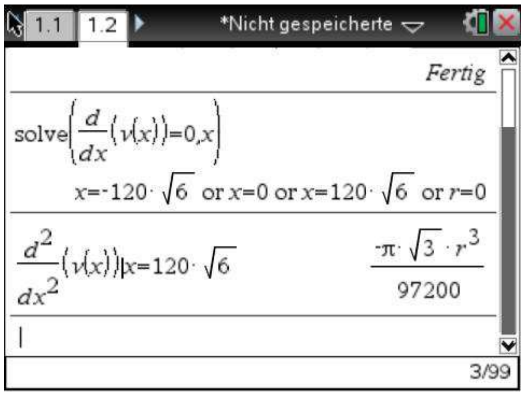
$$V'(\alpha) = 0 = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{360°}\right)^2} - \frac{\alpha^2}{2 \cdot (360°)^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{360°}\right)^2}}$$

Achtung: Lösungen $r = 0$ bzw. $x = 0$ entfallen.

$$\alpha^2 = 2 \cdot (360°)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{\alpha}{360°}\right)^2\right)$$

$$\alpha = 120° \cdot \sqrt{6} \text{ mit } V''(120° \cdot \sqrt{6}) < 0$$





Die Berechnung der Aufgabe N1 erfolgt analog. Es muss nur beachtet werden, dass sich die Zielfunktion aus der Summe der beiden Kegelvolumen zusammensetzt. Die obigen Beziehungen sind dabei genauso zu verwenden.

Anmerkung: Es ist zu Überlegen, ob ein Lösungsweg unbedingt die Niederschrift der ersten Ableitung erfordert.

Aufgabe 4: So what – Math in 3-dimensional space?

Themengebiet	*Analytische Geometrie – Lagebeziehungen von Geraden*

Klassenstufe	*12*

Kurzbeschreibung	*Einen Blick über den Tellerrand zu werfen, ist immer lohnenswert: So ist es zum Beispiel spannend zu sehen, wie Themen der analytischen Geometrie im Mathematikunterricht in Großbritannien behandelt werden. Im konkreten Fall befasst sich der Text eines schottischen Schulbuches mit den Lagebeziehungen von Geraden im Raum. Neben der ungewohnten Schreibweise schildert der Text einen Lösungsweg, mit dem die meisten deutschen Schüler nicht vertraut sein dürften. Zum Glück handelt der Text von einem mathematischen Sachverhalt, sodass man auch kein Sprachentalent sein müsste, um ihn zu verstehen.* *Erfrischend ist auch die Ehrlichkeit, mit der die Einleitung beginnt: "This is not something you need to do very often, and so it is not a particularly important problem, but it does provide another illustration of how you can use and adapt the ideas we have developed in this section." [Dagger/Weiss 2007, S.41]*

Lehrplanbezüge	*...Lagebeziehungen bestimmen und begründen für: Punkt – Gerade, Gerade – Gerade, Gerade – Koordinatenebene.* *...Abstände berechnen: Punkt – Punkt, Punkt – Gerade.* *...CAS und dynamische Geometriesoftware zur Lösung ebener sowie räumlicher geometrischer Problemstellungen selbständig anwenden.*

Mathematische Leitideen	*Raum und Form* *Messen*

Vorschlag zur Zuordnung der Mathematischen Kompetenzen

Aufgabe	**Mathematisch argumentieren**	**Probleme mathematisch lösen**	**Mathematisch modellieren**	**Mathematische Darstellungen verwenden**	**Mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen**	**Mathematisch Kommunizieren**
A1					x	x
A2				x	x	x
A3	x	x				
A4						x

Referenzen

DAGGER, S.; WEISS, M. (2007): Vectors and Matrices. Department of Mathematical Sciences, University of Aberdeen. S.41f

N1 So what – Math in 3-dimensional space?

In einem englisch-sprachigen Mathematiklehrbuch kann man folgende Rechnung finden:

> *Shortest distances are measured along perpendiculars. So the idea this time is to locate points P and Q on the two lines so that PQ is perpendicular to both lines. The length of PQ will then be the distance required.*
>
> *EXAMPLE[...]*
>
> $$p = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ and } q = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
>
> *Let´s be good sports and work without coordinates for a little while. So rewrite the first vector equation as p=a+ λd and the second one as q=b+ τ e. We are trying to choose λ and τ in such a way that q-p is perpendicular to both d and e. (Reason: p is the position vector of point P on the first line. Then q– p=PQ. We want that to be perpendicular to the direction of the first line, which is the direction of d, and also to the direction of the second line, which is the direction of e.) Therefore we have two equations to satisfy:*
>
> $$\big((b + \tau e) - (a + \lambda d)\big) \cdot d = 0,$$
>
> $$((b + \tau e) - (a + \lambda d) \cdot e = 0.$$
>
> *Then*
>
> $$(e \cdot d)\tau - (d \cdot d)\lambda = a \cdot d - b \cdot d,$$
>
> $$(e \cdot e)\tau - (d \cdot e)\lambda = a \cdot e - b \cdot e$$
>
> *Alright, now it may be time to use the coordinates. We have e·d=-1, d·d=9, e·e=10, a·d=5, b·d=-10, a·e=3, b·e=-7. So*
>
> $$-\tau - 9 = 15,$$
>
> $$10\tau + \lambda = 10.$$
>
> *So* $\lambda = -\frac{160}{89}$ *and* $\tau = 105/89$. *Therefore*
>
> *P= (-1+ λ, 2 λ, 3+2 λ) = (-249/89, -320/89, -53/89),*
>
> *Q= (2– 3 τ,-1+ τ,-5) = (-137/89, 16/89,-445/89).*
>
> *Therefore*
>
> $$|PQ| = \frac{1}{89}\sqrt{112^2 + 336^2 + 392^2} = \frac{1}{89}\sqrt{279104}$$
>
> *[...]*
>
> *Dagger, S.; Weiss, M. (2007) Vectors and Matrices. Department of Mathematical Sciences, University of Aberdeen. S.41f*

		☹	😐	☺
A1	**Lies dir den englischen Text genau durch. Versuche die Rechnung nachzuvollziehen und gib dem Text eine deutsche Überschrift.**			
A2	**Gib eine deutsche Übersetzung für das englische Wort *perpendicular* an. Bestimme welche Lagebeziehung im drei-dimensionalen Raum in dem Beispiel vorgestellt wird.**			
A3	**Berechne dieses Beispiel auf deine Art und finde den Fehler in der vorgestellten Rechnung.**			
A4	**Nenne fünf weitere Lagebeziehungen von Ebenen und Geraden im drei-dimensionalen Raum.**			

N2 So what – Math in 3-dimensional space?

In einem englisch-sprachigen Mathematiklehrbuch kann man folgende Rechnung finden:

This is not something you need to do very often, and so it is not particularly important problem, but it does provide another illustration of how you can use and adapt the ideas we have developed in this section.

Shortest distances are measured along perpendiculars. So the idea this time is to locate points P and Q on the two lines so that $\underline{PQ}$ is perpendicular to both lines. The length of PQ will then be the distance required.

EXAMPLE[...]

$$p = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ and } q = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Let´s be good sports and work without coordinates for a little while. So rewrite the first vector equation as p=a+ λd and the second one as q=b+ τ e. We are trying to choose λ and τ in such a way that q-p is perpendicular to both d and e. (Reason: p is the position vector of point P on the first line. Then q–p=$\underline{PQ}$. We want that to be perpendicular to the direction of the first line, which is the direction of d, and also to the direction of the second line, which is the direction of e.) Therefore we have two equations to satisfy:

$$\big((b + \tau e) - (a + \lambda d)\big) \cdot d = 0,$$

$$((b + \tau e) - (a + \lambda d) \cdot e = 0.$$

Then

$$(e \cdot d)\tau - (d \cdot d)\lambda = a \cdot d - b \cdot d,$$

$$(e \cdot e)\tau - (d \cdot e)\lambda = a \cdot e - b \cdot e$$

Alright, now it may be time to use the coordinates. We have e·d=-1, d·d=9, e·e=10, a·d=5, b·d=-10, a·e=3, b·e=-7. So

$$-\tau - 9 = 15,$$

$$10\tau + \lambda = 10.$$

So $\lambda = -\frac{160}{89}$ *and* $\tau = 105/89$. *Therefore*

P= (-1+ λ, 2 λ, 3+2 λ) = (-249/89, -320/89, -53/89),

Q= (2–3 τ,-1+ τ,-5) = (-137/89, 16/89,-445/89).

Therefore

$$|PQ| = \frac{1}{89}\sqrt{112^2 + 336^2 + 392^2} = \frac{1}{89}\sqrt{279104}$$

[...]

Dagger, S.; Weiss, M. (2007) Vectors and Matrices. Department of Mathematical Sciences, University of Aberdeen. S.41f

☹	😐	☺

A1 **Lies dir den englischen Text genau durch. Versuche die Rechnung nachzuvollziehen und gib dem Text eine deutsche Überschrift.**

A2 **Gib eine deutsche Übersetzung für das englische Wort *perpendicular* an. Bestimme welche Lagebeziehung im drei-dimensionalen Raum in dem Beispiel vorgestellt wird.**

A3 **Berechne dieses Beispiel auf deine Art und finde den Fehler in der vorgestellten Rechnung.**

N3 So what – Math in 3-dimensional space?

In einem englisch-sprachigen Mathematiklehrbuch kann man folgende Rechnung finden:

This is not something you need to do very often, and so it is not particularly important problem, but it does provide another illustration of how you can use and adapt the ideas we have developed in this section.

Shortest distances are measured along perpendiculars. So the idea this time is to locate points P and Q on the two lines so that <u>*PQ*</u> *is perpendicular to both lines. The length of PQ will then be the distance required.*

EXAMPLE[...]

$$p = \begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} \text{ and } q = \begin{bmatrix}2\\-1\\-5\end{bmatrix} + \tau\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}$$

Let´s be good sports and work without coordinates for a little while. So rewrite the first vector equation as $p=a+\lambda d$ and the second one as $q=b+\tau e$. We are trying to choose λ and τ in such a way that q-p is perpendicular to both d and e. (Reason: p is the position vector of point P on the first line. Then $q-p=$<u>*PQ*</u>*. We want that to be perpendicular to the direction of the first line, which is the direction of d, and also to the direction of the second line, which is the direction of e.) Therefore we have two equations to satisfy:*

$$\big((b+\tau e)-(a+\lambda d)\big)\cdot d = 0,$$

$$((b+\tau e)-(a+\lambda d)\cdot e = 0.$$

Then

$$(e\cdot d)\tau-(d\cdot d)\lambda = a\cdot d - b\cdot d,$$

$$(e\cdot e)\tau-(d\cdot e)\lambda = a\cdot e - b\cdot e$$

Alright, now it may be time to use the coordinates. We have $e\cdot d=-1$, $d\cdot d=9$, $e\cdot e=10$, $a\cdot d=5$, $b\cdot d=-10$, $a\cdot e=3$, $b\cdot e=-7$. So

$$-\tau-9=15,$$

$$10\tau+\lambda=10.$$

So $\lambda = -\frac{160}{89}$ *and* $\tau = 105/89$. *Therefore*

$P= (-1+\lambda, 2\lambda, 3+2\lambda) = (-249/89, -320/89, -53/89)$,

$Q= (2-3\tau,-1+\tau,-5) = (-137/89, 16/89,-445/89)$.

Therefore

$$|PQ| = \frac{1}{89}\sqrt{112^2+336^2+392^2} = \frac{1}{89}\sqrt{279104}$$

[...]

Dagger, S.; Weiss, M. (2007) Vectors and Matrices. Department of Mathematical Sciences, University of Aberdeen. S.41f

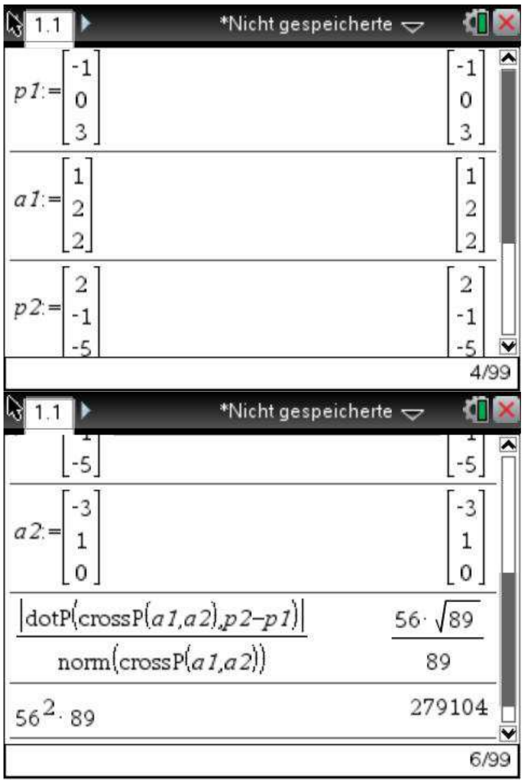
A1 **Lies dir den englischen Text genau durch. Versuche die Rechnung nachzuvollziehen und gib dem Text eine deutsche Überschrift.**

A2 **Bestimme welche Lagebeziehung im drei-dimensionalen Raum in dem Beispiel vorgestellt wird.**

A3 **Berechne dieses Beispiel auf deine Art und finde den Fehler in der vorgestellten Rechnung.**

☹	😐	☺

Lösungshinweise zu Aufgabe 4: So what – Math in 3-dimensional space?

Aufgabe	Lösungshinweis	Screenshot (Beispiel)
A1	Der Text handelt von der Lagebeziehung zweier Geraden im 3-dimensionalen Raum. Eine mögliche Überschrift könnte lauten: *Abstandsberechnung zweier windschiefer Geraden.*	
A2	Das englische Wort *perpendicular* bedeutet im Deutschen orthogonal (senkrecht stehend). Der Text handelt von der Abstandsberechnung zweier windschiefer Geraden im 3-dimensionalen Raum.	
A3	Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten den Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden zu berechnen. Die entsprechende Formel zur Abstandsberechnung kann in einem Tafelwerk nachgeschlagen werden. Bei der Berechnung hilft ein CAS: $d=\frac{\lvert(\vec{a_1}\times\vec{a_2})\cdot(\vec{p_2}-\vec{p_1})\rvert}{\lvert(\vec{a_1}\times\vec{a_2})\rvert}$ $d=\frac{\left\lvert\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\right)\right\rvert}{\left\lvert\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}\right\rvert}$ $d=\frac{\left\lvert\begin{pmatrix}-2\\-6\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\-8\end{pmatrix}\right\rvert}{\left\lvert\begin{pmatrix}-2\\-6\\7\end{pmatrix}\right\rvert}$ $d=\frac{56}{\sqrt{89}}=\frac{56\cdot\sqrt{89}}{89}=\frac{1}{89}\cdot\sqrt{279104}$ Der Fehler in der Beispielrechnung befindet sich in dem aufgestellten Gleichungssystem. Es fehlt in der oberen Gleichung das Lambda: $-\tau-9\lambda=15,$ $10\tau+\lambda=10.$	
A4	Bestimmen kann man … • … den Schnittpunkt zweier sich schneidender Geraden. • … den Durchstoßpunkt einer Ebene beim Schnitt mit einer Geraden. • … die Schnittgerade zweier sich schneidender Ebenen. Weitere Lagebeziehungen sind … • parallele Geraden (identische Geraden), • parallele Ebenen (identische Ebenen).	

Aufgabe 5: Fußball – Das ist reine Glückssache.

Themengebiet	*Stochastik – Poisson-Verteilung*

Klassenstufe	*11*

Kurzbeschreibung	*Wenn man keine Ahnung von der Stärke zweier Fußballmannschaften hat, ist der Spielausgang vollkommen ungewiss und man möchte nicht auf das Ergebnis wetten. Allerdings fallen bei einem Fußballspiel in der Regel nicht sehr viele Tore. In der Höhe der geringen Spielstände unterscheidet sich das Spiel von den meisten anderen großen Ballsportarten. Der* ***englische Spieltheoretiker Jack Dowie*** *ist daher auf die Idee gekommen, dass die Fußballergebnisse Poisson-verteilt sein könnten. Mit diesem Wissen ist man vielleicht doch dazu geneigt, auf die Fußballergebnisse zu wetten und in der Tat kann man mit dieser Methode die Quoten der Wettbüros ziemlich gut approximieren.*

Lehrplanbezüge	*…die bei Zufallsexperimenten gewonnen Daten auch unter Nutzung von Computersoftware in Tabellen und Diagrammen darstellen und auswerten.* *…Ideen und Ergebnisse zur Beschreibung, Simulation, und Berechnung von Zufallsexperimenten adressatengerecht formulieren, bewerten, präsentieren.* *…Ergebnisse stochastischer Berechnungen auf Plausibilität überprüfen und kritisch werten.* *…Chancen und Risiken von zufälligen Ereignissen in Sachkontexten beurteilen.*

Mathematische Leitideen	*Daten und Zufall* *Funktionaler Zusammenhang*

Vorschlag zur Zuordnung der Mathematischen Kompetenzen

Aufgabe	Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	Mathematisch Kommunizieren
A1	x		x			x
A2.1				x	x	
A2.2				x	x	x
A3		x	x		x	

Referenzen

MATHELITSCH, L.; THALLER, S. (2010): Sport und Physik. Aulis Verlag. S.83f

http://www.sport1.de/dynamic/datencenter/sport/ergebnisse/fussball/bundesliga-2009-2010 17.05.2013

N1 Fußball –Das ist reine Glückssache.

Ein berühmtes Fußballzitat von Jürgen Wegmann zur Spielanalyse lautet: „*Erst hatten wir kein Glück und dann kam auch noch Pech dazu.*" Es stellt sich dabei die Frage, ob Fußball wirklich so viel mit Glück und daher mit dem Zufall zu tun hat?

Es soll dazu ein Beispiel betrachtet werden. Nehmen wir an, eine Mannschaft A ist doppelt so erfolgreich beim Torabschluss wie eine Mannschaft B.

☺	😐	☹

A1 Bestimme die Wahrscheinlichkeit das Mannschaft B das Spiel gegen Mannschaft A gewinnt, wenn im gesamten Spiel nur ein Tor fällt, beziehungsweise 3 Tore fallen. Nimm Stellung zu den Siegchancen des Teams B.

Um mehr über den Zufallscharakter des Fußballspiels zu erfahren, braucht man mehr Daten. Daher folgt die Tabelle der 1. Fußballbundesliga der Saison 2009/2010:

#		TEAM	SPIELE	SPIELE OHNE TOR	TORE	+/-	P
1	•	Bayern München	34	3	72:31	41	70
2	•	FC Schalke 04	34	6	53:31	22	65
3	•	Werder Bremen	34	5	71:40	31	61
4	•	Bayer Leverkusen	34	6	65:38	27	59
5	•	Borussia Dortmund	34	4	54:42	12	57
6	•	VfB Stuttgart	34	8	51:41	10	55
7	•	Hamburger SV	34	9	56:41	15	52
8	•	VfL Wolfsburg	34	3	64:58	6	50
9	▲	1. FSV Mainz 05	34	12	36:42	-6	47
10	▼	Eintracht Frankfurt	34	6	47:54	-7	46
11	•	1899 Hoffenheim	34	12	44:42	2	42
12	▲	Bor. Mönchengladbach	34	10	43:60	-17	39
13	▼	1. FC Köln	34	16	33:42	-9	38
14	•	SC Freiburg	34	12	35:59	-24	35
15	•	Hannover 96	34	12	43:67	-24	33
16	•	1. FC Nürnberg	34	15	32:58	-26	31
17	•	VfL Bochum	34	10	33:64	-31	28
18	•	Hertha BSC	34	13	34:56	-22	24

http://www.sport1.de/dynamic/datencenter/sport/ergebnisse/fussball/bundesliga-2009-2010

A2.1 Bestimme wie viele Tore jede Mannschaft in einem Spiel im Durchschnitt geschossen hat. Bestimme auch für jedes Team das Verhältnis zwischen Spielen ohne Torerfolg und den jeweils gemachten Spielen.

A2.2 Stelle den Zusammenhang der beiden Größen graphisch dar und bestimme die exponentielle Regression der Daten. Lasse dir die Funktion $f(x) = e^{-x}$ zeichnen. Vergleiche die beiden Funktionen und gehe dabei auch auf die jeweilige Basis ein.

Schon der englische Spieltheoretiker Jack Dowie erkannte einen ähnlichen Zusammenhang bei der näheren Untersuchung von Fußballergebnissen. Von Ihm stammt daher die Idee, den Zufallscharakter des Fußballspiels mit der Poisson-Verteilung zu beschreiben:

$$\boldsymbol{P_k(a) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}}$$

Dabei ist a die Spielstärke einer Mannschaft, diese kann als die Anzahl der Tore angenommen werden, die die Mannschaft in der Saison pro Match im Durchschnitt erzielt hat.

Mit dieser Formel kann man berechnen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Team im nächsten Spiel k-viele Tore erzielt.

A3 Ermittle auf Grundlage der Daten der Bundesligasaison 2009/ 2010 den wahrscheinlichsten Spielausgang einer Partie zwischen zwei selbstgewählten Bundesligisten.

Tipp:

Vergleiche dein Ergebnis mit dem tatsächlichen Spielstand zum Abpfiff.

N2 Fußball –Das ist reine Glückssache.

Ein berühmtes Fußballzitat von Jürgen Wegmann zur Spielanalyse lautet: „*Erst hatten wir kein Glück und dann kam auch noch Pech dazu.*“ Es stellt sich dabei die Frage, ob Fußball wirklich so viel mit Glück und daher mit dem Zufall zu tun hat?

Es soll dazu ein Beispiel betrachtet werden. Nehmen wir an, eine Mannschaft A ist doppelt so erfolgreich beim Torabschluss wie eine Mannschaft B.

☺	😐	☹

A1 Bestimme die Wahrscheinlichkeit das Mannschaft B das Spiel gegen Mannschaft A gewinnt, wenn im gesamten Spiel nur ein Tor fällt, beziehungsweise 3 Tore fallen. Nimm Stellung zu den Siegchancen des Teams B.

Um mehr über den Zufallscharakter des Fußballspiels zu erfahren, braucht man mehr Daten. Daher folgt die Tabelle der 1. Fußballbundesliga der Saison 2009/2010:

#		TEAM	SPIELE	SPIELE OHNE TOR	TORE	+/-	P
1	•	Bayern München	34	3	72:31	41	70
2	•	FC Schalke 04	34	6	53:31	22	65
3	•	Werder Bremen	34	5	71:40	31	61
4	•	Bayer Leverkusen	34	6	65:38	27	59
5	•	Borussia Dortmund	34	4	54:42	12	57
6	•	VfB Stuttgart	34	8	51:41	10	55
7	•	Hamburger SV	34	9	56:41	15	52
8	•	VfL Wolfsburg	34	3	64:58	6	50
9	▲	1. FSV Mainz 05	34	12	36:42	-6	47
10	▼	Eintracht Frankfurt	34	6	47:54	-7	46
11	•	1899 Hoffenheim	34	12	44:42	2	42
12	▲	Bor. Mönchengladbach	34	10	43:60	-17	39
13	▼	1. FC Köln	34	16	33:42	-9	38
14	•	SC Freiburg	34	12	35:59	-24	35
15	•	Hannover 96	34	12	43:67	-24	33
16	•	1. FC Nürnberg	34	15	32:58	-26	31
17	•	VfL Bochum	34	10	33:64	-31	28
18	•	Hertha BSC	34	13	34:56	-22	24

http://www.sport1.de/dynamic/datencenter/sport/ergebnisse/fussball/bundesliga-2009-2010

A2.1 Bestimme wie viele Tore jede Mannschaft in einem Spiel im Durchschnitt geschossen hat. Bestimme auch für jedes Team das Verhältnis zwischen Spielen ohne Torerfolg und den jeweils gemachten Spielen.

A2.2 Stelle den Zusammenhang der beiden Größen graphisch dar und bestimme die exponentielle Regression der Daten. Lasse dir die Funktion $f(x) = e^{-x}$ zeichnen. Vergleiche die beiden Funktionen.

Schon der englische Spieltheoretiker Jack Dowie erkannte einen ähnlichen Zusammenhang bei der näheren Untersuchung von Fußballergebnissen. Von Ihm stammt daher die Idee, den Zufallscharakter des Fußballspiels mit der Poisson-Verteilung zu beschreiben:

$$\boldsymbol{P_k(a) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}}$$

Dabei ist a die Spielstärke einer Mannschaft, diese kann als die Anzahl der Tore angenommen werden, die die Mannschaft in der Saison pro Match im Durchschnitt erzielt hat.

Mit dieser Formel kann man berechnen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Team im nächsten Spiel k-viele Tore erzielt.

A3 Ermittle auf Grundlage der Daten der Bundesligasaison 2009/ 2010 den wahrscheinlichsten Spielausgang einer Partie zwischen zwei selbstgewählten Bundesligisten.

<u>Tipp:</u>

Vergleiche dein Ergebnis mit dem tatsächlichen Spielstand zum Abpfiff.

<u>Hinweis:</u>

$P_k(a)$… Wahrscheinlichkeit das Mannschaft A k-viele Tore schießt

$P_n(b)$… Wahrscheinlichkeit das Mannschaft B n-viele Tore schießt

$$P_k(a) \cdot P_n(b) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a} \cdot \frac{b^n}{n!} \cdot e^{-b}$$

N3 Fußball –Das ist reine Glückssache.

Ein berühmtes Fußballzitat von Jürgen Wegmann zur Spielanalyse lautet: „*Erst hatten wir kein Glück und dann kam auch noch Pech dazu.*“ Es stellt sich dabei die Frage, ob Fußball wirklich so viel mit Glück und daher mit dem Zufall zu tun hat?

Es soll dazu ein Beispiel betrachtet werden. Nehmen wir an, eine Mannschaft A ist doppelt so erfolgreich beim Torabschluss wie eine Mannschaft B.

☺	😐	☹

A1 **Bestimme die Wahrscheinlichkeit das Mannschaft B das Spiel gegen Mannschaft A gewinnt, wenn im gesamten Spiel nur ein Tor fällt, beziehungsweise 3 Tore fallen. Nimm Stellung zu den Siegchancen des Teams B.**

Um mehr über den Zufallscharakter des Fußballspiels zu erfahren, braucht man mehr Daten. Daher folgt die Tabelle der 1. Fußballbundesliga der Saison 2009/2010:

#		TEAM	SPIELE	SPIELE OHNE TOR	TORE	+/-	P
1	•	Bayern München	34	3	72:31	41	70
2	•	FC Schalke 04	34	6	53:31	22	65
3	•	Werder Bremen	34	5	71:40	31	61
4	•	Bayer Leverkusen	34	6	65:38	27	59
5	•	Borussia Dortmund	34	4	54:42	12	57
6	•	VfB Stuttgart	34	8	51:41	10	55
7	•	Hamburger SV	34	9	56:41	15	52
8	•	VfL Wolfsburg	34	3	64:58	6	50
9	▲	1. FSV Mainz 05	34	12	36:42	-6	47
10	▼	Eintracht Frankfurt	34	6	47:54	-7	46
11	•	1899 Hoffenheim	34	12	44:42	2	42
12	▲	Bor. Mönchengladbach	34	10	43:60	-17	39
13	▼	1. FC Köln	34	16	33:42	-9	38
14	•	SC Freiburg	34	12	35:59	-24	35
15	•	Hannover 96	34	12	43:67	-24	33
16	•	1. FC Nürnberg	34	15	32:58	-26	31
17	•	VfL Bochum	34	10	33:64	-31	28
18	•	Hertha BSC	34	13	34:56	-22	24

http://www.sport1.de/dynamic/datencenter/sport/ergebnisse/fussball/bundesliga-2009-2010

A2.1 **Bestimme wie viele Tore jede Mannschaft in einem Spiel im Durchschnitt geschossen hat. Bestimme auch für jedes Team das Verhältnis zwischen Spielen ohne Torerfolg und den jeweils gemachten Spielen.**

A2.2 **Stelle den Zusammenhang der beiden Größen graphisch dar und bestimme die exponentielle Regression der Daten.**

Schon der englische Spieltheoretiker Jack Dowie erkannte einen ähnlichen Zusammenhang bei der näheren Untersuchung von Fußballergebnissen. Von Ihm stammt daher die Idee, den Zufallscharakter des Fußballspiels mit der Poisson-Verteilung zu beschreiben:

$$\boldsymbol{P_k(a) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}}$$

Dabei ist a die Spielstärke einer Mannschaft, diese kann als die Anzahl der Tore angenommen werden, die die Mannschaft in der Saison pro Match im Durchschnitt erzielt hat.

Mit dieser Formel kann man berechnen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Team im nächsten Spiel k-viele Tore erzielt.

A3 Ermittle auf Grundlage der Daten der Bundesligasaison 2009/ 2010 den wahrscheinlichsten Spielausgang einer Partie zwischen zwei selbstgewählten Bundesligisten.

Tipp:

Vergleiche dein Ergebnis mit dem tatsächlichen Spielstand zum Abpfiff.

Hinweis:

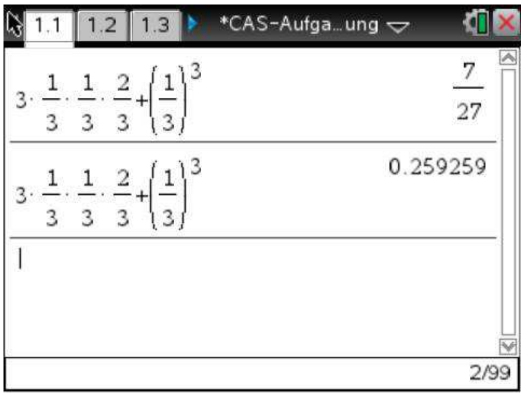
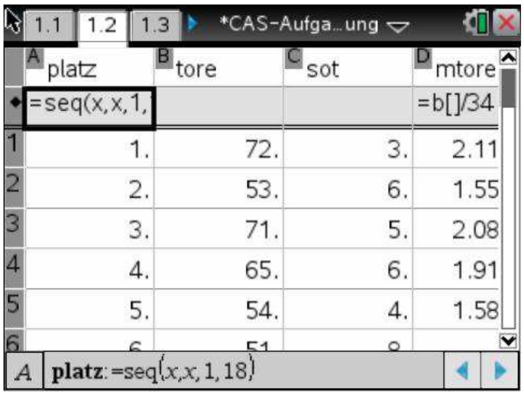
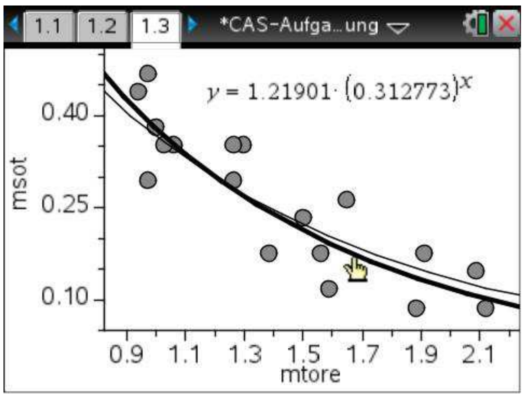
$P_k(a)$… Wahrscheinlichkeit das Mannschaft A k-viele Tore schießt

$P_n(b)$… Wahrscheinlichkeit das Mannschaft B n-viele Tore schießt

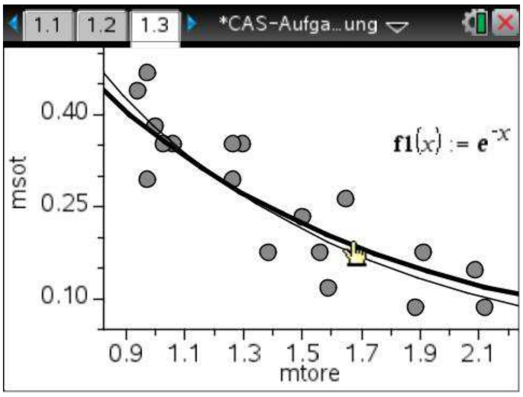
$P_k(a) \cdot P_n(b)$… Wahrscheinlichkeit für den Spielausgang k:n

$$P_k(a) \cdot P_n(b) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a} \cdot \frac{b^n}{n!} \cdot e^{-b} = \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{b^n}{n!} \cdot e^{-(a+b)}$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 5: Fußball – Das ist reine Glückssache.

Aufgabe	Lösungshinweis	Screenshot (Beispiel)
A1	Wenn in einem Spiel nur ein Tor fällt und die bessere Mannschaft doppelt so stark ist, dann hat die schwächere Mannschaft eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ das Tor zu erzielen und damit das Spiel zu gewinnen. Wenn drei Tore fallen, gibt es zwei mögliche Spielstände (3:0/ 2:1), bei denen die schwächere Mannschaft gewinnt. Bei dem ersten Spielstand hat sie alle Tore geschossen, die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. Der zweite Spielstand kann in drei möglichen Szenarien entstehen, je nach dem wann welche Mannschaft ein Tor schießt: $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. Die Gesamtwahrscheinlichkeit für einen Sieg ist demnach: $\frac{2}{9} + \frac{1}{27} \approx 0{,}26$. Diese beiden Wahrscheinlichkeiten für einen Sieg der schwächeren Mannschaft sind nicht schlecht, wenn man bedenkt, dass wir annehmen, sie ist nur halb so stark. Das zeigt, dass ein Underdog im Fußball immer eine Chance hat.	
A2.1	Für diese Aufgabe ist ein Tabellenkalkulationsprogramm hilfreich. Man übernimmt die Bundesligatabelle von 2009/10 mit den Platzierungen (platz), den Toren (tore), den Spielen ohne Tor (sot). Dadurch fällt es einfach, für jedes Team das Verhältnis zwischen den letztgenannten Größen und der Gesamtanzahl aller Spiele (34) aufzustellen.	
A2.2	Auch bei der graphischen Veranschaulichung des Zusammenhangs der in A2.1 berechneten Verhältnisse hilft ein Tabellenkalkulationsprogamm weiter. Es fällt auf, dass die Datenpunkte einen indirekt proportionalen Zusammenhang aufzeigen. An dieser Stelle kann man das Programm eine exponentielle Regression der Daten bestimmen lassen.	

Vergleicht man diese Regression mit der Funktion $f(x) = e^{-x}$ fällt eine starke Ähnlichkeit auf, die beiden Funktionen stimmen in ihren Basen fast überein. Das heißt, die Funktion $f(x) = e^{-x}$ bietet eine gute Möglichkeit, um die Daten zu beschreiben. Das ist ein klares Indiz dafür, dass diese Daten Poisson-verteilt sind.



A3

Wie im Hinweis in Aufgabe N3 beschrieben, kann man die Wahrscheinlichkeit eines möglichen Spielausgangs im Fußball mithilfe der Poisson-Verteilung berechnen:

$P_k(a)$...Wahrscheinlichkeit das Mannschaft A k-viele Tore schießt

$P_n(b)$...Wahrscheinlichkeit das Mannschaft B n-viele Tore schießt

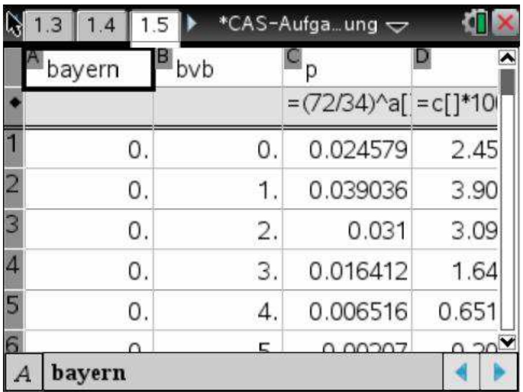
$P_k(a) \cdot P_n(b)$...Wahrscheinlichkeit für den Spielausgang k:n

$$P_k(a) \cdot P_n(b) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a} \cdot \frac{b^n}{n!} \cdot e^{-b}$$
$$= \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{b^n}{n!} \cdot e^{-(a+b)}$$

Für die sogenannten Gewichte a und b kann man die in A2.1 berechneten Verhältnisse einsetzten.

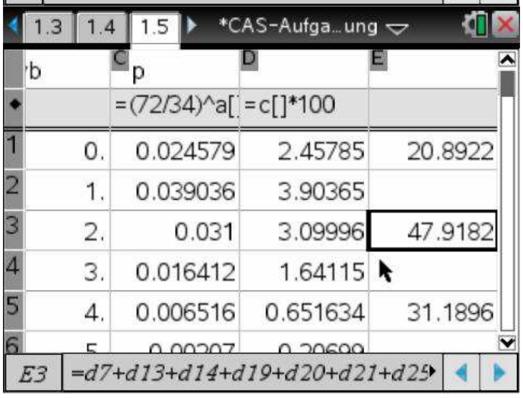
Mit einem Tabellenkalkulationsprogamm kann man nun alle denkbaren Spielstände erfassen und für diese Spielstände mit der obigen Formel die Eintrittswahrscheinlichkeit bestimmen.

In dem nebenstehenden Beispiel ist das für ein Spiel zwischen Borussia Dortmund und dem FC Bayern München mit den Daten der Saison 2009/10 durchgespielt wurden. Wenn die Wahrscheinlichkeiten der Spielstände die einen Sieg des FC Bayern darstellen addiert, erhält man eine Wahrscheinlichkeit von 48% eines Sieges von Bayern München. Eine Unentschieden hat die Wahrscheinlichkeit von 21% und Borussia Dortmunds Siegchancen liegen bei 31%. Tatsächlich haben die Bayern Dortmund in dieser Saison 5:1 bzw. 3:1 geschlagen.



	A bayern	B bvb	C p	D
◆			=(72/34)^a[	=c[]*10
1	0.	0.	0.024579	2.45
2	0.	1.	0.039036	3.90
3	0.	2.	0.031	3.09
4	0.	3.	0.016412	1.64
5	0.	4.	0.006516	0.651

	A bayern	B bvb	C p	D
◆			=(72/34)^a[	=c[]*10
7	1.	0.	0.052049	5.20
8	1.	1.	0.082665	8.26
9	1.	2.	0.065646	6.56
10	1.	3.	0.034754	3.47
11	1.	4.	0.013799	1.37



	b	C p	D	E
◆		=(72/34)^a[	=c[]*100	
1	0.	0.024579	2.45785	20.8922
2	1.	0.039036	3.90365	
3	2.	0.031	3.09996	47.9182
4	3.	0.016412	1.64115	
5	4.	0.006516	0.651634	31.1896