Übersicht zur Geometrie in der Schule
(Sekundarstufe I)

Christian Richter & **Michael Schmitz**
(christian.richter@uni-jena.de & michael.schmitz@uni-jena.de)

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik

(Juli 2014)

Liebe Leser[1],

das vorliegende Skript ist sowohl für Schüler gedacht, die sich für ein Studium der Mathematik (auch für das Lehramt) entschieden haben, als auch für unsere Studenten in den Anfangssemestern. Es ist aus unserer Erfahrung heraus entstanden, dass gerade die elementare Geometrie, die in der Schule vermittelt wird, unseren Studierenden oft Schwierigkeiten bereitet. Ein Grund dafür ist, dass dieser Inhalt meist mehrere Jahre zurückliegt und in der gymnasialen Oberstufe nur selten wiederholt wird. Dabei ist aber auch die elementare Geometrie eine wichtige Grundlage für das Mathematikstudium, speziell für das des Lehramtes.

Da wir Sie bei Ihrem Studium unterstützen wollen, haben wir diesen Schulstoff hier zusammengefasst. Dabei geben wir nicht nur die notwendigen Definitionen und Sätze an, sondern stellen auch ausgewählte Beweise vor. Gerade diese Beweise, die im Schulunterricht manchmal in den Hintergrund treten, sind beim Studium der Mathematik von großer Bedeutung.

Inhaltlich orientieren wir uns an den *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss* [1].

Lesen bzw. arbeiten Sie dieses Skript durch, um sich auf Ihr Studium vorzubereiten.

Des Weiteren wollen wir Sie hier auf zwei *populärwissenschaftliche* Bücher hinweisen. Sie erhalten dort einen guten Ein- und Überblick über Ihr gewähltes Fach und erfahren etwas über historische Hintergründe:

- Robert und Ellen Kaplan: *Das Unendliche denken: Eine Verführung zur Mathematik.* Econ Verlag, 2003. ([9])
- Mario Livio: *Ist Gott ein Mathematiker? Warum das Buch der Natur in der Sprache der Mathematik geschrieben ist.* Verlag C. H. Beck, 2010. ([11])

Hilfe zum Einstieg in das streng mathematische Denken bietet:

- Houston, Kevin: *Wie man mathematisch denkt: Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger.* Spektrum Akademischer Verlag, 2012. ([8])

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg und Freude beim Studium der Mathematik.

[1] Natürlich dürfen sich hier auch Leserinnen und an anderen Stellen auch Schülerinnen, Studentinnen, Lehrerinnen, ... angesprochen fühlen.

Inhaltsverzeichnis

Elementare Geometrie

Wenn wir im Folgenden von der elementaren Geometrie sprechen, dann wollen wir darunter den Inhalt des Mathematikunterrichts, der in der Sekundarstufe I zu dieser Thematik gelehrt wird, verstehen. Auch betrachten wir im Wesentlichen nur die ebene Geometrie. Am Ende dieses Skriptes, wenn es um Körper und Volumen geht, verlassen wir die Ebene und betrachten die Geometrie im Raum.

Am Anfang werden wir etwas über die Entstehungsgeschichte der Geometrie und ihrer axiomatischen Begründung berichten, ohne dabei systematisch und vollständig zu sein. Es geht uns darum, dass Sie eine Idee mitnehmen, wie man in der Geometrie bzw. Mathematik arbeitet. Wir werden auch grundlegende Begriffe wie z.B. Strecke, Strahl oder Winkel – die Sie natürlich aus der Schule kennen – etwas genauer erläutern. Davon sollten Sie sich aber nicht abschrecken lassen.

1 Grundlegendes

Die Geometrie, so wie wir sie heute betreiben, hat eine Geschichte, die mehrere tausend Jahre alt ist. Sie entwickelte sich aus den alltäglichen Bedürfnissen der Menschen. Dabei kann man an die Landvermessung (z.B. nach der jährlichen Überschwemmung durch den Nil) oder an Konstruktions- und Vermessungsaufgaben bei Bauprojekten (z.B. bei den Pyramiden von Gizeh) oder auch an künstlerische Tätigkeiten (z.B. beim Anbringen von Mustern an Gefäßen) denken. Alle diese vielfältigen Tätigkeiten führten dazu, dass sich unsere heutige Geometrie entwickelte.

Ein wichtiger Zeitpunkt in dieser Entwicklung liegt etwa 300 v.u.Z., als der Grieche Euklid das damalige mathematische Wissen in den *Elementen* zusammenfasste und systematisierte. Die besondere Leistung von Euklid war es, dass er die Geometrie aus den Grundelementen Punkt, Gerade und Ebene aufbaute. Zu diesen Grundelementen formulierte er wenige grundlegende Aussagen (wir nennen sie heute Axiome), in denen er die Beziehungen der Grundelemente untereinander regelte. Beispiele für solche Axiome sind:

- Zwei voneinander verschiedene Punkte bestimmen genau eine Gerade, die diese beiden Punkte enthält.
- Es gibt drei Punkte in der Ebene, die nicht zu ein und derselben Geraden gehören.
- ...

Diese und weitere Axiome setzte Euklid an den Anfang der Geometrie. Er entnahm sie der Anschauung und sagte, dass diese Grundannahmen wahr sein sollen und keines Beweises bedürfen. Anschließend wurden alle weiteren Tatsachen der Geometrie allein durch logisches Schließen aus diesen Grundannahmen hergeleitet. Dies alles geschieht in den *Elementen* [4]. Dieses Buch, das eigentlich aus 13 Büchern besteht, war fast 2000 Jahre das wichtigste Lehrbuch der Geometrie/Mathematik.

1899 hat David Hilbert (1862 - 1943) in seinen *Grundlagen der Geometrie* [7] Euklids Axiomatisierung der Geometrie in dem Sinne abgeschlossen, dass der erreichte Stand den heutigen streng-mathematischen Ansprüchen genügt.

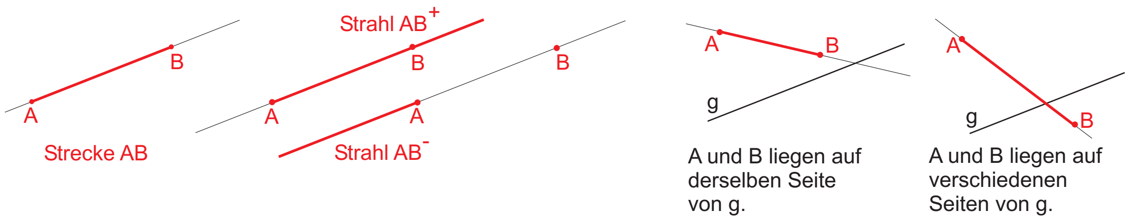
Heute beweisen wir noch immer mathematische Sätze, indem wir sie durch logische Schlussfolgerungen auf andere, bereits bewiesene Sätze zurückführen. Natürlich müssen diese Sätze auch wieder auf bereits bewiesene Sätze zurückgeführt werden u.s.w. bis schließlich Sätze auf die grundlegenden Axiome zurückgeführt werden. Man sagt auch, dass die Geometrie axiomatisch begründet ist. Die Gesamtheit der Axiome bezeichnet man als Axiomensystem.

Dieses Vorgehen in der Geometrie wurde ein Muster für andere mathematische Teildisziplinen, die später ebenfalls axiomatisch aufgebaut wurden. Ein modernes Axiomensysten der ebenen Geometrie nutzt den Begriff *Punkt* als Grundbegriff. Geometrische Objekte sind dann Punktmengen. Dazu gehören auch *Geraden* und *Ebenen*, die ebenfalls zu den Grundbegriffen der Geometrie gehören. Im Folgenden bezeichnen wir Punkte in der Regel mit großen lateinischen Buchstaben und Geraden mit kleinen.

Oben wurden exemplarisch zwei Axiome über Beziehungen von Punkten und Geraden formuliert. Diese werden auch als Inzidenzaxiome bezeichnet. Sogenannte Anordnungsaxiome beschreiben Grundannahmen über die gegenseitige Lage von Punkten auf Geraden. Zum Beispiel:

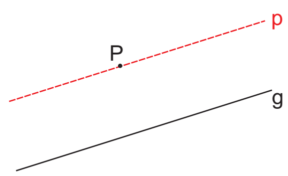
- Von drei Punkten auf einer Geraden liegt genau einer *zwischen* den beiden anderen.
- ...

Sind A und B zwei verschiedene Punkte, so besteht die **Strecke** AB neben A und B aus allen Punkten P, die *zwischen* A und B liegen. Der **Strahl** AB^+ enthält neben A und B sowohl alle Punkte, die zwischen A und B liegen, als auch alle Punkte P derart, dass B zwischen A und P liegt. Natürlich kann man auch den Strahl AB^- betrachten und meint damit alle Punkte der von A und B bestimmten Geraden $g(AB)$, die mit Ausnahme von A nicht zu AB^+ gehören. Man sagt, dass zwei Punkte X und Y **auf der gleichen Seite** einer vorgegebenen Geraden g liegen, wenn zwischen A und B kein Punkt von g liegt. Entsprechend zerlegt jede Gerade die verbleibenden Punkte der Geometrie (der Ebene) in zwei Mengen, die beiden **Seiten** bzw. **Halbebenen** von g.



Zwei weitere Gruppen von Axiomen beschäftigen sich einerseits mit Grundannahmen zur *Kongruenz* bzw. zur *Bewegung* geometrischer Objekte (Kongruenz- bzw. Bewegungsaxiome) und andererseits mit dem *Messen* von Strecken und Winkeln (Stetigkeitsaxiome).

Ein Axiom, das man bereits bei Eukild findet und das in der Mathematik viel Aufsehen erregt hat, ist das Parallelenaxiom, das Euklid als fünftes und letztes Axiom in seinem System formulierte. Es lautet in moderner Formulierung:
Ist g eine Gerade und P ein Punkt, so *gibt es genau eine* Gerade p, die durch P geht und parallel zu g ist.



Dabei heißen zwei Geraden **parallel** zueinander, wenn sie entweder keinen Punkt oder alle Punkte gemeinsam haben. Am Rande wollen wir hier nur noch bemerken, dass die Existenz von parallelen Geraden aus den anderen Axiomen bewiesen werden kann. Lediglich die Eindeutigkeit ist in dem oben genannten Axiom von Bedeutung.

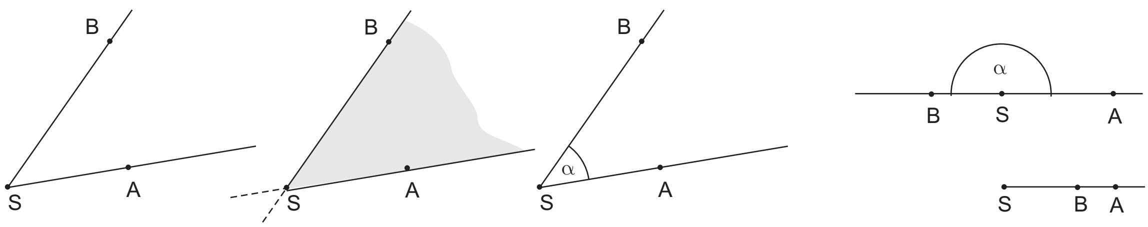
Weil dieses Parallelenaxiom, im Vergleich zu den anderen, einen komplizierten Wortlaut hat, dachten viele Mathematiker nach Euklid, dass dieses Axiom in Wirklichkeit ein Satz ist, der auf der Grundlage der anderen Axiome bewiesen werden kann. Keinem ist es gelungen. Erst im 19. Jahrhundert konnten unabhängig voneinander Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 - 1856), János Bolyai (1802 - 1860) und Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) zeigen, dass dies auch nicht gelingen kann. Sie schufen eine *neue* Geometrie, in der nicht das Parallelenaxiom, sondern sein Gegenteil gilt. In dieser Geometrie gibt es durch einen Punkt

P außerhalb einer Geraden g mindestens zwei voneinander verschiedene Geraden, die zu g parallel sind. Diese Geometrie wird als *nichteuklidische Geometrie* bezeichnet und findet zum Beispiel in der Kosmologie eine Anwendung. Entsprechend heißt die Geometrie, in der das euklidische Parallelenaxiom gilt, *euklidische Geometrie*. Dieses ist die Geometrie, die wir in unserem Anschauungsraum betreiben und in der Schule kennenlernen.

Wir werden etwas später das Parallelenaxiom nutzen, um zu zeigen, dass die Summe der Innenwinkel im Dreieck 180° beträgt.

Wer an weiteren Einzelheiten und historischen Hintergründen interessiert ist, findet in [12] interessanten Lesestoff.

Neben den oben eingeführten Strecken und Strahlen sind in der Geometrie auch Winkel von Bedeutung. Betrachten wir dazu drei voneinander verschiedene Punkte S, A und B, die nicht auf einer Geraden liegen, so bilden die beiden Strahlen SA^+ und SB^+ die Schenkel eines Winkels mit dem Scheitelpunkt S. Durch diese beiden Schenkel wird die Ebene in zwei Teile eingeteilt. Derjenige Teil, der die Strahlen SA^- und SB^- nicht enthält, ist der **Winkel**, der durch die beiden Schenkel SA^+ und SB^+ gebildet wird. Wollen wir den anderen Ebenenteil als Winkel von SA^+ und SB^+ betrachten, so muss das immer besonders erwähnt werden.



Winkel werden oft mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, aber auch die Symbolik $\sphericalangle ASB$ oder $\sphericalangle BSA$ ist gebräuchlich.

Auch wenn die drei gewählten Punkte S, A und B auf einer Geraden liegen, entstehen Winkel. Liegt S zwischen A und B, so nennen wir den Winkel **gestreckten Winkel**, liegt S nicht zwischen A und B, so nennen wir den Winkel **Nullwinkel**.

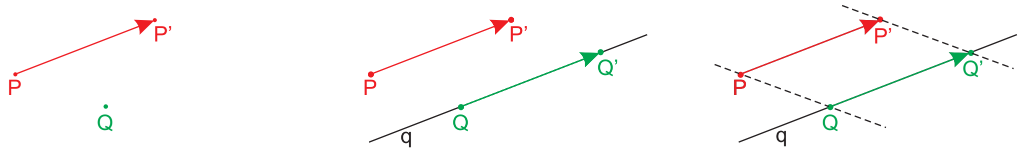
2 Bewegungen und Kongruenz

Wir nennen zwei (ebene) Figuren F und F' **kongruent** zueinander, $F \cong F'$, wenn es eine Kongruenzabbildung (Bewegung) gibt, die F auf F' abbildet. F und F' nennt man dann auch **deckungsgleich**.

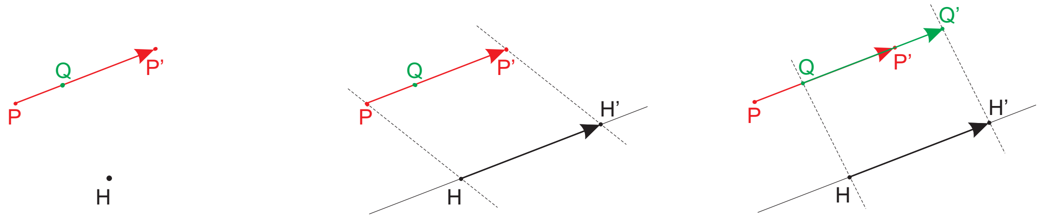
Solche Bewegungen sind Verschiebung, Spiegelung an einer Geraden, Drehung um einen Punkt oder Nacheinanderausführungen dieser Bewegungen, so wie wir es in der Schule kennengelernt haben.

Zur Erinnerung: Eine **Verschiebung** ist durch einen Punkt P (Originalpunkt) und einen Punkt P' (Bildpunkt) eindeutig bestimmt. $\overrightarrow{PP'}$ bezeichnet damit nicht nur einen Verschiebungspfeil[2], sondern beschreibt auch die gesamte Verschiebung, bei der alle Punkte der Ebene abgebildet (verschoben) werden. Wollen wir den Bildpunkt zu einem weiteren Originalpunkt Q bestimmen, so müssen wir durch Q die Parallele q zu PP' zeichnen und auf dieser Parallelen von Q aus in die Verschiebungsrichtung die Länge der Strecke PP' abtragen. Dies kann zum Beispiel mit einem Zirkel geschehen. Man kann den gesuchten Bildpunkt Q' auch anders konstruieren. Dazu wird durch P' die Parallele zu PQ gezeichnet, die q im gesuchten Bildpunkt Q' schneidet.

[2]Hier ist kein Vektor gemeint!

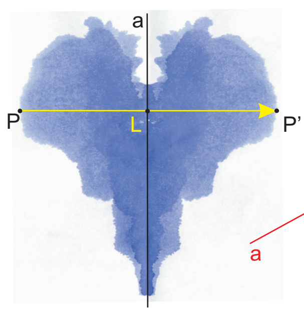


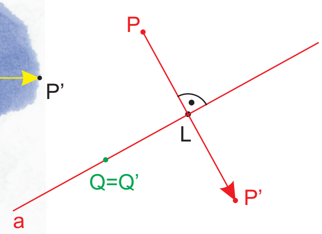
Natürlich kann der Punkt Q auch auf der durch P und P' bestimmten Geraden liegen. Dann müssen wir die Konstruktion des Bildpunktes Q' etwas abwandeln. Wir wählen uns einen beliebigen Hilfspunkt H, der nicht auf der Geraden durch P und P' liegt, und bilden diesen ab. H' ist der zugehörige Bildpunkt. Nun bestimmt $\overrightarrow{HH'}$ dieselbe Verschiebung wie $\overrightarrow{PP'}$ und wir können Q abbilden.



Erwähnt werden soll hier auch noch, dass bei der Vorgabe einer Verschiebung durch P und P' diese beiden Punkte zusammenfallen können, d.h., P und P' sind identisch. In diesem Fall heißt die Verschiebung **Identität** und es wird jeder Punkt der Ebene auf sich selbst abgebildet.

Nutzen Sie auch den Computer zum Konstruieren. Laden Sie sich dazu das Programm GeoGebra (www.geogebra.at) auf Ihren Rechner. Es ist intuitiv zu bedienen und auf der genannten Internetseite finden Sie Anleitungen und viele Beispiele.





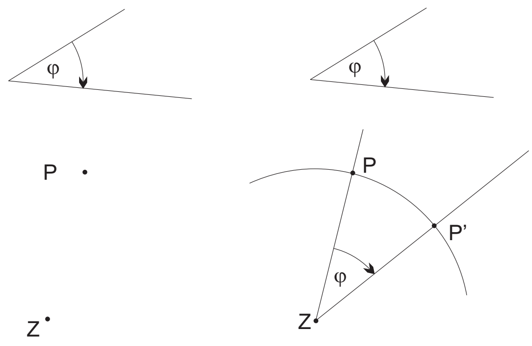
Zur Erinnerung: Eine **Spiegelung an einer Geraden** (kurz **Geradenspiegelung**) ist durch die Vorgabe einer Geraden a als Spiegelachse eindeutig bestimmt. In der Schulzeit lernt man diese Abbildung oft durch Tintenklecksbilder kennen. Dabei wird ein Tintenklecks auf ein Blatt Papier gemacht. Anschließend wird es zusammengefaltet und gut zusammengedrückt. Nach dem Auffalten erkennt man eine Figur, die zur Faltgeraden a symmetrisch liegt. Daraus leiten sich dann die wichtigen Eigenschaften der Geradenspiegelung ab. Verbinden wir nämlich einen Punkt P auf der einen Seite der Faltgeraden mit dem zugehörigen Punkt P' auf der anderen Seite, so können wir feststellen:

- PP' ist senkrecht zu a,
- PL und $P'L$ sind kongruent zueinander.

Damit ist aber die Geradenspiegelung an einer Spiegelachse a schon vollkommen beschrieben. Ist a eine Spiegelachse und P ein beliebiger Punkt, der nicht auf a liegt, so erhalten wir den zugehörigen Bildpunkt P', indem wir zuerst das Lot von P auf a fällen. Bezeichnen wir den Lotfußpunkt mit L, so wird die Strecke PL auf diesem Lot von L aus in die Halbebene bezüglich a abgetragen, die P nicht enthält.

Ist Q ein Punkt von a, so wird dieser Punkt bei der Geradenspiegelung an a auf sich abgebildet, d.h, es gilt $Q' = Q$. Das heißt aber auch, dass jeder Punkt der Spiegelgeraden a bei der Geradenspiegelung an a auf sich abgebildet wird. Die Punkte von a nennt man auch **Fixpunkte** dieser Abbildung.

Bilden wir mit einer Geradenspiegelung an a einen beliebigen Punkt P ab, so erhalten wir den zugehörigen Bildpunkt P'. Spiegeln wir nun P' an a, so erhalten wir den zugehörigen Bildpunkt P'', der mit P übereinstimmt. Damit ist die zweimalige Hintereinanderausführung der Geradenspiegelung an der Achse a die identische Abbildung, die jeden Punkt der Ebene auf sich selbst abbildet.



Zur Erinnerung: Eine **Drehung um einen Punkt** (kurz **Drehung**) ist durch die Vorgabe eines Punktes als Drehzentrum und einen Drehwinkel (mit Richtung) bestimmt. Nun sind also ein Drehzentrum Z und ein Drehwinkel φ mit negativem Drehsinn (also mit dem Uhrzeigersinn) vorgegeben. Ist P ein beliebiger Punkt, der nicht mit Z zusammenfällt, so verbinden wir Z mit P und tragen an ZP^+ den gegebenen Drehwinkel mit der entsprechenden Drehrichtung ab. Der freie Schenkel des abgetragenen Winkels schneidet den Kreis um Z durch P im gesuchten Bildpunkt P'. Fällt der abzubildende Punkt P mit dem Drehzentrum zusammen ($P = Z$), so ist $P' = P$. Das Drehzentrum ist der Fixpunkt dieser Abbildung.

3 Strecken- und Winkelmessung

Das Messen von Längen und Winkeln mit Lineal und Winkelmesser gehört in der Schule zu den grundlegenden Aktivitäten (nicht nur) des Mathematikunterrichts. Wir wollen hier kurz über die Grundlagen dazu berichten. Beim Messen einer Strecke AB wird dieser eine **Länge** $|AB|$ zugeordnet. Diese Länge besteht aus einer nicht negativen reellen Zahl, der **Längenmaßzahl** $l(AB)$, und der zugehörigen **Längeneinheit**. Die Längeneinheit wird durch eine **Eichstrecke** (oder auch **Einheitsstrecke**) EF repräsentiert ($E \neq F$). Beispiele für solche Längeneinheiten sind z.B. Millimeter (1mm), Zentimeter (1cm), Meter (1m), Kilometer (1km) oder Lichtjahr. Eine 4cm lange Strecke CD ($|CD| = 4$cm) hat die Längenmaßzahl $l(CD) = 4$ und die Längeneinheit 1cm.

Hat man eine solche Eichstrecke EF festgelegt, so erfüllt die Längenmessung die folgenden drei Eigenschaften:

- Es gilt $l(EF) = 1$ (Eichung oder Normiertheit der Streckenlänge).
- Liegt ein Punkt B zwischen A und C, so gilt $l(AC) = l(AB) + l(BC)$ (Additivität der Streckenlänge).
- Sind AB und $A'B'$ kongruente Strecken, so gilt $l(AB) = l(A'B')$ (Bewegungstreue der Streckenlänge).

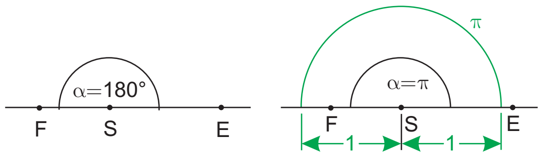
Dabei müssen wir beachten, dass die Eichstrecke EF nicht zu einem Punkt entartet, also $E \neq F$ gelten muss. Strecken der degenerierten Gestalt AA sind jedoch sinnvoll messbar, nämlich mit $l(AA) = 0$.

Auch dem Messen liegen in der Geometrie Axiome, die Stetigkeitsaxiome, zugrunde. Sie besagen im Wesentlichen, dass bei fest vorgegebener Maßeinheit einerseits jeder Strecke genau eine Maßzahl im Sinne der oben genannten drei Punkte zugeordnet werden kann und andererseits zu jeder positiven reellen Zahl x eine Strecke mit Maßzahl x existiert. Damit wird das Messen, so wie wir es bisher gelernt haben, ermöglicht.

Ähnlich wie bei der Messung von Strecken ist die **Größe** $|\sphericalangle ASB|$ des Winkels $\sphericalangle ASB$ Produkt von **Maßzahl** $w(\sphericalangle ABC)$ und **Maßeinheit**. Die nicht negative Maßzahl muss allen

Winkeln wieder so zugeordnet werden, dass sie entsprechende Eigenschaften von Additivität, Bewegungstreue und Eichung (siehe oben) erfüllt.

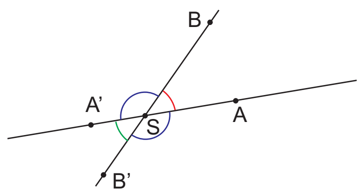
Zur Eichung wird eine Beziehung zu einem **gestreckten Winkel** $\sphericalangle ESF$ hergestellt, bei dem also S zwischen E und F liegt. Nutzt man die Maßeinheit **Grad** (mit dem Symbol °), so fordert man $|\sphericalangle ESF| = 180°$. Alternativ misst man Winkel im **Bogenmaß** (ohne Symbol !), indem man $|\sphericalangle ESF| = \pi$ festlegt. Dabei ist $\pi = 3,14\ldots$ die bekannt Kreiszahl und gleichzeitig auch die Längenmaßzahl einer Halbkreislinie, deren Radius die Einheitslänge hat.



Obwohl Strecken und Streckenlänge, Winkel und Winkelgröße ihrer Natur nach völlig unterschiedliche mathematische Objekte sind, werden dafür (in der Schule und auch hier) oftmals identische Bezeichnungen genutzt. Dann wird z.B. in Dreiecken die Strecke AB mit c und ihre Länge ebenso mit c, statt mit $|c|$ bezeichnet. Oder es wird die Größe eines Winkels α auch einfach mit α, statt mit $|\alpha|$ bezeichnet. Dass man diese Konvention nur vorsichtig nutzen darf, erkennt man beispielsweise daran, dass verschiedene Winkel α und β identische Größen haben können, nämlich wenn sie kongruent sind. Würde man hier Winkel und zugehörige Größen identisch bezeichnen, erhielte man gleichzeitig $\alpha \neq \beta$ (für die Winkel) und $\alpha = \beta$ (für ihre Größen), was unsinnig wäre.

4 Spezielle Winkel, insbesondere Winkel an geschnittenen Parallelen

Definition 1 (Neben- und Scheitelwinkel) *Es seien A, A', B, B' und S Punkte, so dass S einerseits zwischen A und A' und andererseits auch zwischen B und B' liegt. Dann nennt man $\sphericalangle ASB'$ und $\sphericalangle A'SB$ die **Nebenwinkel** und $\sphericalangle A'SB'$ den **Scheitelwinkel** von $\sphericalangle ASB$.*



Aufgrund der Definition für Neben- und Scheitelwinkel können wir sofort einen ersten Satz formulieren, der auch ohne Beweis klar ist.

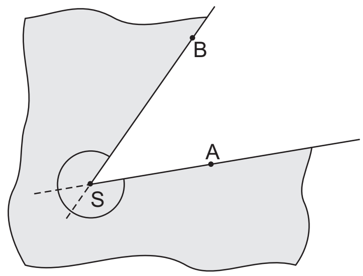
Satz 1 *(a) Die Größen eines Winkels und eines zugehörigen Nebenwinkels addieren sich zu* 180°.

(b) Scheitelwinkel sind kongruent, also gleich groß.

Nun können wir auch Winkel anhand ihrer Größe benennen. Gestreckte Winkel und Nullwinkel kennen wir bereits. Ein Winkel heißt

- **Nullwinkel**, wenn seine Schenkel identisch sind,
- **gestreckter Winkel**, wenn seine Schenkel komplementäre Strahlen sind,
- **rechter Winkel**, wenn er zu einem seiner Nebenwinkel kongruent ist,
- **spitz**, wenn er kleiner als ein rechter Winkel, aber kein Nullwinkel ist,
- **stumpf**, wenn er größer als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter Winkel ist.

Gelegentlich werden auch Winkel als **überstumpf** bezeichnet. Damit sind Winkel gemeint, die größer als gestreckte Winkel sind. Wenn SA^+ und SB^+, $SA^+ \neq SB^+$, die beiden Schenkel des Winkels sind, so wird jetzt derjenige Teil der Ebene den Schenkeln als Winkel zugeordnet, der die beiden Strahlen SA^- und SB^- enthält (vgl. S. 6).



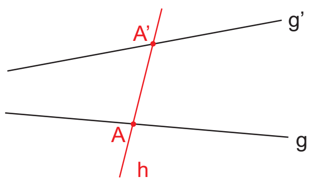
Da ein rechter Winkel zu einem Nebenwinkel kongruent, also insbesondere gleich groß ist, folgt aus Satz 1(a), dass rechte Winkel 90° groß sind. Hat ein Winkel die Größe α, so ist er also ein Nullwinkel, wenn $\alpha = 0°$, spitz für $0° < \alpha < 90°$, ein rechter Winkel für $\alpha = 90°$, stumpf für $90° < \alpha < 180°$ und gestreckt für $\alpha = 180°$.

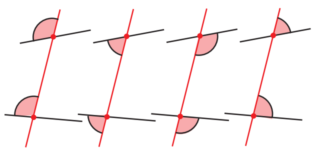
Ist α die Größe eines überstumpfen Winkels, so gilt $180° < \alpha < 360°$. Manchmal werden auch noch Winkel mit $\alpha = 360°$ zugelassen, sogenannte **Vollwinkel**. Dann sind die Schenkel wie beim Nullwinkel identisch, aber der Winkel umfasst die ganze Ebene.

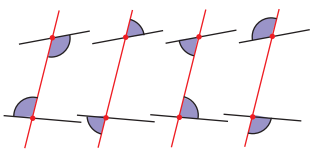
Von besonderem Interesse sind Winkel, die beim Schnitt zweier Geraden mit einer dritten entstehen.

Definition 2 (Stufen- und Wechselwinkel) *Zwei verschiedene Geraden g und g' seien durch eine dritte Gerade h geschnitten, wobei mit g der Schnittpunkt A und mit g' der Schnittpunkt A' mit $A \neq A'$ entstehe. Dann heißen ein Winkel mit Scheitel A und Schenkeln auf g und h und ein Winkel mit Scheitel A' und Schenkeln auf g' und h*

- ***Stufenwinkel**, wenn ihre Schenkel auf h in die gleiche Richtung weisen und ihre anderen Schenkel auf der gleichen Seite von h liegen, bzw.*
- ***Wechselwinkel**, wenn ihre Schenkel auf h in gegensätzliche Richtungen weisen und ihre anderen Schenkel auf verschiedenen Seiten von h liegen.*




Stufenwinkel


Wechselwinkel

Wenn die beiden Geraden g und g' parallel zueinander sind, lässt sich ein Satz formulieren und mit Hilfe von Bewegungen leicht beweisen.

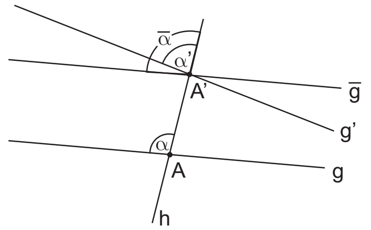
Satz 2 (Winkel an geschnittenen Parallelen) *Stufenwinkel bzw. Wechselwinkel, die beim Schnitt zweier Parallelen mit einer dritten Geraden entstehen, sind kongruent.*

Beweis: Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent, weil sie durch eine Verschiebung aufeinander abgebildet werden können. Die Aussage über Wechselwinkel folgt daraus durch Anwendung von Satz 1(b). ■

Interessant ist auch die Umkehrung dieses Satzes. Diese Umkehrung kann z.B. in Beweisen benutzt werden, in denen die Parallelität von Gerden gezeigt werden soll.

Satz 3 (Umkehrung von Satz 2) *Entsteht beim Schnitt zweier Geraden g und g' mit einer weiteren Geraden h ein Paar kongruenter Stufen- oder Wechselwinkel, so sind g und g' parallel.*

Beweis: g und g' sind zwei Geraden, die von der Geraden h in den Punkten A und A' geschnitten werden.



Wenden wir uns zuerst den Stufenwinkeln zu. Nach Voraussetzung ist also ein Paar von Stufenwinkeln kongruent zueinander, z.B. $\alpha \cong \alpha'$.

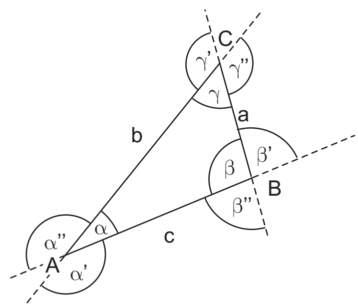
Nun betrachten wir durch A' die Parallele $\bar{g}$ zu g. Diese parallele Gerade ist nach dem Parallelenaxiom eindeutig bestimmt. Mit $\bar{\alpha}$ bezeichnen wir den zu α gehörenden Stufenwinkel an $\bar{g}$. Weil nach Satz 2 $\alpha \cong \bar{\alpha}$ ist, ist auch $\alpha' \cong \bar{\alpha}$. Deshalb muss g' mit $\bar{g}$ übereinstimmen, d.h, $g' = \bar{g}$ muss parallel zu g sein. Damit ist der Beweis des Satzes für Stufenwinkel erbracht.

Da Satz 1(b) wie im letzten Beweis den Übergang von Wechsel- zu Stufenwinkeln erlaubt, können wir feststellen, dass unser Satz ebenfalls für Wechselwinkel, und damit insgesamt, gilt. ■

5 Drei- und Vierecke

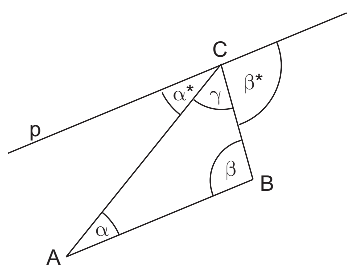
Definition 3 (Dreieck) *Unter einem **Dreieck** verstehen wir einen geschlossenen Streckenzug aus drei Strecken (und drei Eckpunkten), die nicht auf einer Geraden liegen.*

Dreiecke werden wie üblich bezeichnet: A, B, C sind die **Ecken**, a, b, c sind die **Seiten** und α, β, γ sind die **Innenwinkel**. Zu jedem Innenwinkel im Dreieck gibt es zwei **Außenwinkel**, die Nebenwinkel des Innenwinkels sind (α', α'', β', β'' und γ', γ''). Die beiden Außenwinkel sind Scheitelwinkel und somit kongruent. Man fixiert deshalb meistens nur einen Außenwinkel pro Ecke und spricht dann von *dem* Außenwinkel, etwa α', β', γ'.



Satz 4 (Innenwinkelsumme im Dreieck) *Die Summe der Innenwinkel eines jeden Dreiecks beträgt* $180°$.

Beweis: Wir zeichnen die Parallele p durch C zu der Geraden $g(AB)$, so wie es im Bild zu sehen ist. Zu α und β betrachten wir die zugehörigen Wechselwinkel α^* und β^* in C. Diese beiden Wechselwinkel ergänzen sich mit γ zu einem gestreckten Winkel, woraus folgt, dass die Summe der Größen dieser Winkel $180°$ beträgt. Da α und β zu α^* und β^* nach Satz 2 kongruent sind, haben sie auch die gleiche Größe. Folglich ergibt auch die Summe der Größen der Innenwinkel eines jeden Dreiecks $180°$. ■

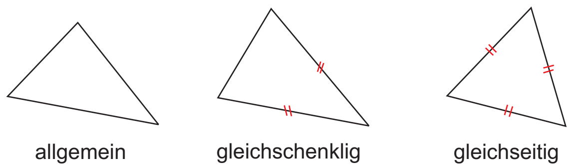


Satz 5 (Außenwinkelsumme im Dreieck) *Die Summe der drei Außenwinkel eines jeden Dreiecks beträgt* $360°$.

Dreiecke kann man nach Seiten und Innenwinkeln charakterisieren.

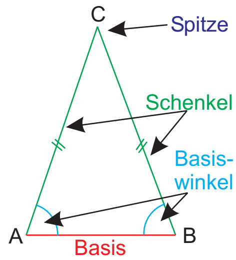
Sortiert man Dreiecke nach ihren Seiten bezüglich ihrer Kongruenz untereinander, so kann man die folgende Einteilung treffen:

- Wird über die Kongruenz der Seiten untereinander keine Aussage getroffen, nennt man dies ein **allgemeines Dreieck**.
- Sind zwei Seiten eines Dreiecks kongruent zueinander, so nennt man dies ein **gleichschenkliges Dreieck**.



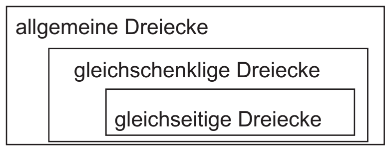
- Sind alle drei Seiten eines Dreiecks kongruent zueinander, so nennt man dies ein **gleichseitiges Dreieck**.

Im gleichschenkligen Dreieck heißen die beiden zueinander kongruenten Seiten **Schenkel** und die dritte Seite **Basis**. Die Dreiecksecke, die der Basis gegenüber liegt, heißt **Spitze** des gleichschenkligen Dreiecks und die beiden Innenwinkel, die an der Basis anliegen, heißen **Basiswinkel**.



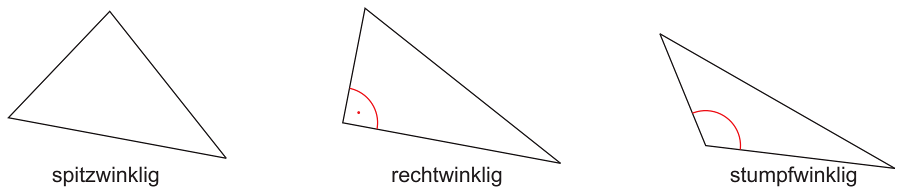
Wir wollen hier darauf hinweisen, dass jedes gleichseitige Dreieck auch ein spezielles gleichschenkliges und jedes gleichschenklige Dreieck auch ein spezielles allgemeines Dreieck ist. Dieser Zusammenhang ist im rechts abgebildeten Mengendiagramm dargestellt.

Damit ist jede Aussage, die für allgemeine Dreiecke gilt, auch für gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke richtig.

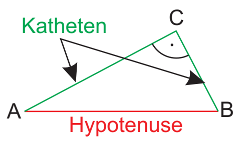


Man kann die folgende Einteilung der Dreiecke nach Winkeln treffen:

- Sind in einem Dreieck alle Innenwinkel spitz, so nennt man dies ein **spitzwinkliges Dreieck**.
- Ist ein Innenwinkel eines Dreiecks ein rechter Winkel, so nennt man dies ein **rechtwinkliges Dreieck**.
- Ist ein Innenwinkel eines Dreiecks ein stumpfer Winkel, so nennt man dies ein **stumpfwinkliges Dreieck**.

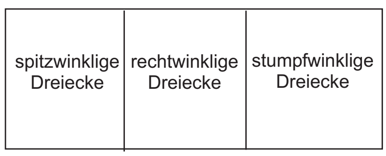


Im rechtwinkligen Dreieck heißen die beiden Seiten, die den rechten Winkel bestimmen, **Katheten**. Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, wird als **Hypotenuse** bezeichnet.

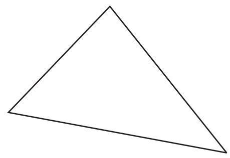
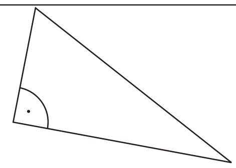
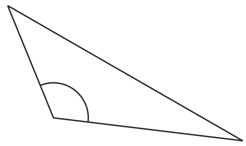
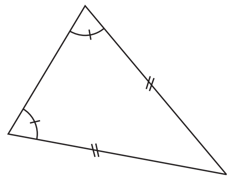
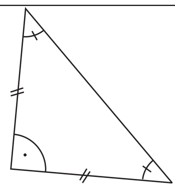
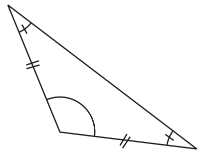
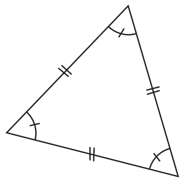


Aus dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck ergibt sich, dass es kein Dreieck gibt, bei dem mehr als ein rechter oder stumpfer Innenwinkel vorkommen kann.

Im rechts gezeigten Mengendiagramm ist die Einteilung der Dreiecke hinsichtlich der Innenwinkel noch einmal dargestellt.

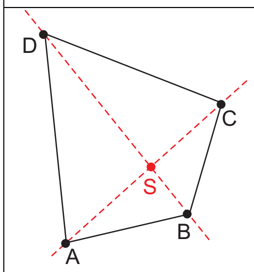
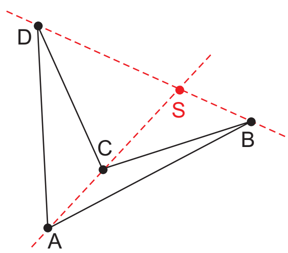
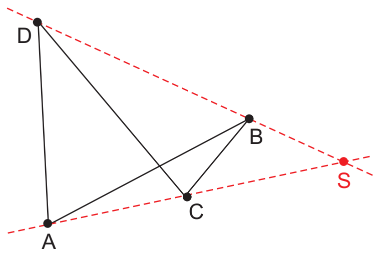


Die Charakterisierung der Dreiecke nach Seiten und nach Winkeln wird in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Dreieck ist	spitzwinklig	rechtwinklig	stumpfwinklig
allgemein			
gleichschenklig			
gleichseitig		×	×

Definition 4 (Viereck) *Unter einem **Viereck** verstehen wir einen geschlossenen Streckenzug aus vier Strecken (und vier Eckpunkten), bei dem keine drei Eckpunkte auf einer Geraden liegen.*

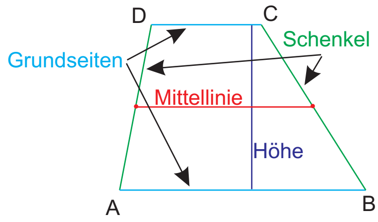
Vierecke lassen sich in konvexe, konkave und überschlagene Vierecke einteilen:

<table>
<tr><th>konvex</th><th>konkav</th><th>überschlagen</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Der Schnittpunkt S der Diagonalen liegt</td></tr>
<tr><td>innerhalb</td><td>außerhalb</td><td>außerhalb</td></tr>
<tr><td colspan="3">des Vierecks.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Zwei Seiten des Vierecks haben</td></tr>
<tr><td colspan="2">nur Eckpunkte des Vierecks gemeinsam.</td><td>neben Eckpunkten des Vierecks auch noch einen weiteren Punkt gemeinsam, der kein Eckpunkt ist.</td></tr>
</table>

Im Weiteren werden wir unter einem Viereck stets ein konvexes Viereck verstehen. Sollen auch konkave Vierecke betrachtet werden, so wird dies extra betont. Überschlagene Vierecke werden hier nicht betrachtet.

Neben dem **allgemeinen** (konvexen) **Viereck** lernen wir in der Schule speziell das Quadrat, das Rechteck, den Rhombus (die Raute), das Parallelogramm, das Trapez und das Drachenviereck kennen. Wir definieren:

Definition 5 (Trapez) *Jedes Viereck mit einem Paar paralleler Gegenseiten heißt **Trapez**.*



Im Trapez bezeichnet man die die parallelen Seiten auch als **Grundseiten** und die anderen beiden Seiten als **Schenkel** des Trapezes. Der Abstand der Grundseiten heißt **Höhe** des Trapezes und die Verbindung der Mittelpunkte der Schenkel nennt man **Mittellinie**.

Definition 6 (Drachenviereck) *Jedes Viereck mit zwei verschiedenen Paaren benachbarter kongruenter Seiten heißt **Drachenviereck**. (Natürlich sollen die beiden Paare keine gemeinsame Seite des Vierecks enthalten.)*

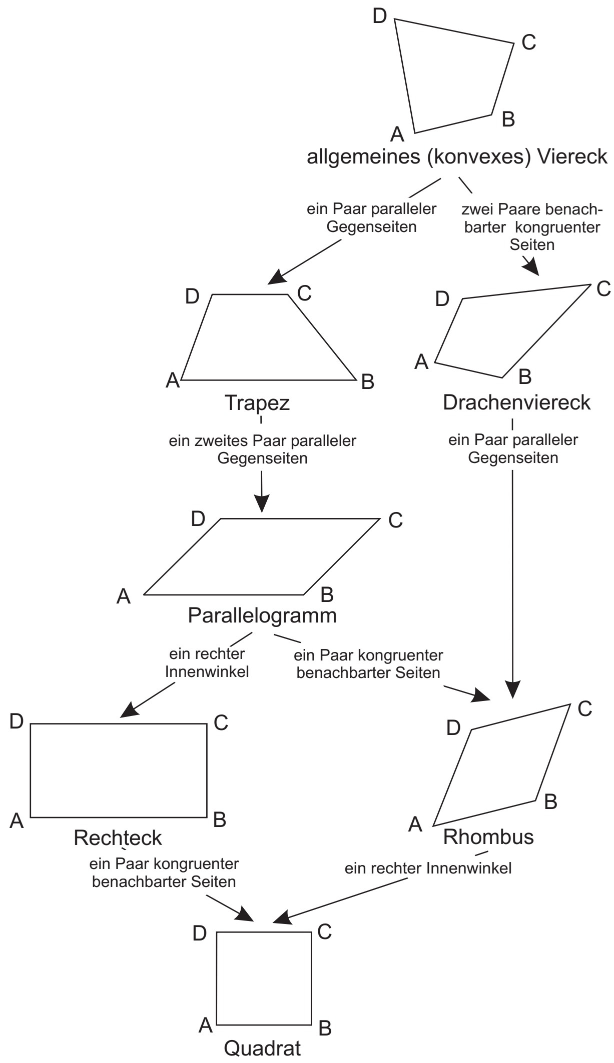
Definition 7 (Parallelogramm) *Jedes Viereck mit zwei Paaren paralleler Gegenseiten heißt **Parallelogramm**.*

Definition 8 (Rhombus, Raute) *Jedes Viereck mit vier kongruenten Seiten heißt **Rhombus**.*

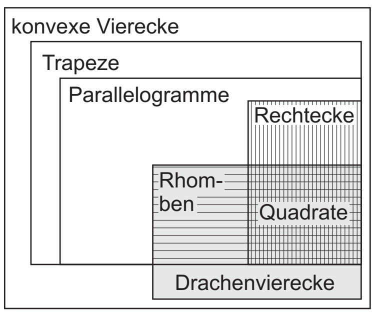
Definition 9 (Rechteck) *Jedes Parallelogramm mit einem rechten Innenwinkel heißt **Rechteck**.*

Definition 10 (Quadrat) *Jedes Rechteck mit vier kongruenten Seiten heißt **Quadrat**.*

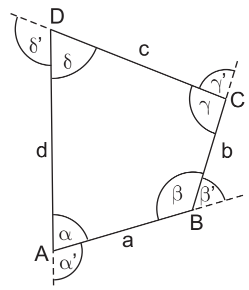
Entsprechend dieser Definitionen kann man die Vierecke so, wie es in der nebenstehenden Grafik zu sehen ist, anordnen.



Einen anderen Blick auf die Beziehungen der Vierecke untereinander gibt das rechts zu sehende Mengendiagramm.

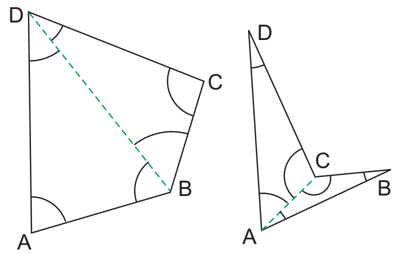


Wie bei den Dreiecken werden auch die Vierecke wie üblich bezeichnet: A, B, C, D sind die Ecken, a, b, c, d sind die Seiten und α, β, γ, δ sind die Innenwinkel. Zu jedem Innenwinkel im konvexen Viereck gibt es einen[3] Außenwinkel, der Nebenwinkel des Innenwinkels ist.



Zeichnet man in ein (nicht überschlagenes) Viereck eine geeignete Diagonale so ein, dass das Viereck in zwei Teildreiecke zerlegt wird, so ergibt sich aus Satz 4 der folgende

Satz 6 (Innenwinkelsumme im Viereck) *Die Summe der Innenwinkel eines jeden (nicht überschlagenen) Vierecks beträgt* $360°$.



Und außerdem folgt:

Satz 7 (Außenwinkelsumme im Viereck) *Die Summe der vier Außenwinkel eines jeden konvexen Vierecks beträgt* $360°$.

6 Lot, Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende

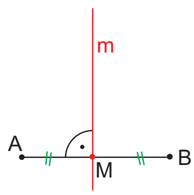
Satz 8 *Ist g eine beliebige Gerade und P ein beliebiger Punkt, dann gibt es durch P genau eine Gerade, die senkrecht auf g ist.*

Aufgrund dieses Satzes können wir nun die folgende Definition geben:

Definition 11 *Die Gerade durch einen Punkt P, die senkrecht auf einer anderen Geraden g steht, heißt das* ***Lot*** *von P auf g. Den Schnittpunkt dieses Lotes mit g nennen wir* ***Lotfußpunkt****. Den Abstand von P zum Lotfußpunkt bezeichnen wir als* ***Länge des Lotes****. Ist $P \in g$, so nennen wir das Lot von P auf g auch die* ***Senkrechte*** *in P auf g.*

Speziell definieren wir:

Definition 12 (Mittelsenkrechte einer Strecke) *Die* ***Mittelsenkrechte*** *einer Strecke AB ist diejenige Gerade, die durch den Mittelpunkt von AB geht und auf AB senkrecht steht.*

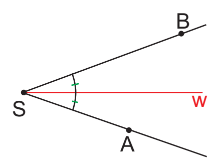


Auch für Winkel gibt es einen entsprechenden Satz:

Satz 9 *Ist $\sphericalangle ASB$ ein Winkel mit $|\sphericalangle ASB| < 180°$, dann gibt es (im Innern dieses Winkels) genau einen Strahl, der von S ausgeht und den gegebenen Winkel in zwei zueinander kongruente Teilwinkel zerlegt.*

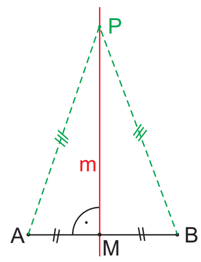
Weil dieser Strahl eindeutig bestimmt ist, geben wir ihm einen Namen:

Definition 13 (Winkelhalbierende eines Winkels) *Die* ***Winkelhalbierende*** *w eines Winkels $\sphericalangle ASB$ ist derjenige Strahl, der von S ausgeht und den Winkel in zwei kongruente Teilwinkel teilt.*

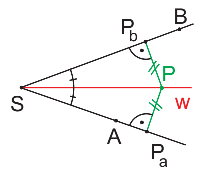


[3] Sie hierzu auch die Anmerkung zu den Außenwinkeln bei Dreiecken (S. 11).

Damit sind die Mittelsenkrechte einer Strecke und die Halbierende eines Winkels definiert und aufgrund der Sätze 8 und 9 auch eindeutig bestimmt.



Die folgenden beiden Sätze geben jeweils eine Eigenschaft für die Mittelsenkrechte bzw. die Winkelhalbierende an. Die dort beschriebenen Eigenschaften können auch als Definitionen benutzt werden. Dann werden die entsprechenden Definitionen Sätze.



Satz 10 *Die Mittelsenkrechte der Strecke AB ist die Menge aller Punkte P, die von A und B gleich weit entfernt sind.*

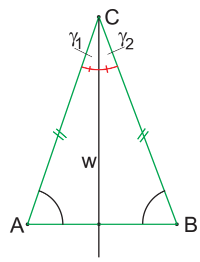
Satz 11 *Die Winkelhalbierende eines Winkels $\sphericalangle ASB$ mit $|\sphericalangle ASB| < 180°$ ist die Menge aller Punkte P im Innern des Winkels, die von den Schenkeln des Winkels gleich weit entfernt sind.*

7 Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks

Beim Zeichnen von gleichschenkligen Dreiecken fällt auf, dass die Basiswinkel kongruent zueinander sind. Das beweisen wir im

Satz 12 *Ist ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC \cong BC$, so sind die beiden Basiswinkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ABC$ kongruent zueinander.*

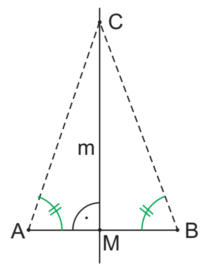
Beweis: Wir konstruieren zuerst die Winkelhalbierende w von $\sphericalangle BCA$ und betrachten die dadurch bestimmte Geradenspiegelung. Weil w die Winkelhalbierende ist, sind die beiden Teilwinkel γ_1 und γ_2 kongruent zueinander. Weil weiterhin jeweils ein Schenkel beider Winkel auf der Spiegelachse w liegt, muss bei der Spiegelung CA^+ auf CB^+ und CB^+ auf CA^+ abgebildet werden. Da aber auch $CA \cong CB$ ist, wird A auf B und B auf A abgebildet. Folglich geht bei der Spiegelung an w der Winkel $\sphericalangle CAB$ in $\sphericalangle ABC$ über. Das heißt aber, dass diese beiden Winkel kongruent zueinander sind. ■



Wir beweisen nun auch noch die Umkehrung von Satz 12.

Satz 13 *Ist ABC ein Dreieck, in dem zwei Innenwinkel kongruent zueinander sind, dann ist das Dreieck gleichschenklig.*

Beweis: O. E. d. A. (Ohne Einschränkung der Allgemeinheit) können wir annehmen, dass $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle ABC$ gilt. Dann konstruieren wir auf AB die Mittelsenkrechte m und betrachten die Geradenspiegelung an dieser Achse. Weil m durch den Mittelpunkt M von AB geht und auf AB senkrecht steht, wird bei der Geradenspiegelung an m der Punkt A auf B und B auf A abgebildet. Nun sind aber auch die beiden Winkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ABC$ kongruent zueinander. Da AB^+ auf BA^+ und umgekehrt BA^+ auf AB^+ abgebildet wird, muss auch AC^+ auf BC^+ und BC^+ auf AC^+ abgebildet werden. Weil AC^+ die Spiegelachse schneidet, muss auch BC^+ durch diesen Schnittpunkt gehen. Nun haben aber AC^+ und BC^+ den Punkt C gemeinsam. Folglich muss C auf der Spiegelachse m liegen, woraus $AC \cong BC$ folgt. ■



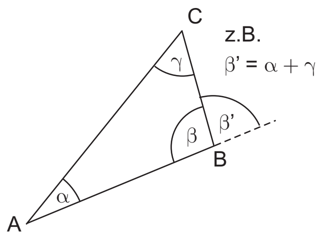
Die eben bewiesenen beiden Sätze können wir zusammenfassen zum

Satz 14 *Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn es zwei zueinander kongruente Innenwinkel hat.*

Aus den beiden oben geführten Beweisen ergibt sich die

Folgerung: *Die Winkelhalbierende des Innenwinkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks und die Mittelsenkrechte der Basis dieses Dreiecks fallen zusammen. Diese Gerade ist die Symmetrieachse dieses Dreiecks.*

Darüber hinaus gelten die folgenden Sätze.



Satz 15 *Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist so groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.*

Satz 16 *In einem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Innenwinkel und dem größeren Innenwinkel die größere Seite gegenüber.*

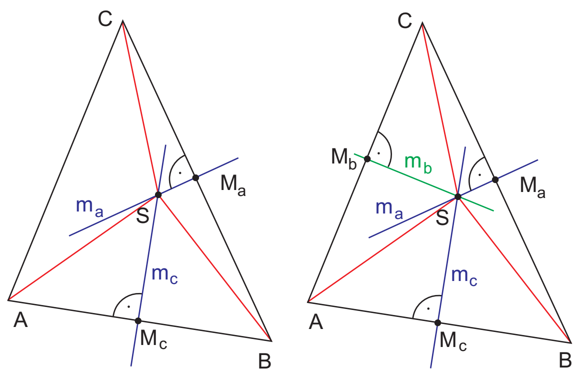
Satz 17 *In einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten immer größer als die dritte Seite.*

Satz 18 *In einem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten immer kleiner als die dritte Seite.*

8 Besondere Linien im Dreieck: Die Mittelsenkrechten, die Winkelhalbierenden, die Höhen

Satz 19 *Im Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt.*

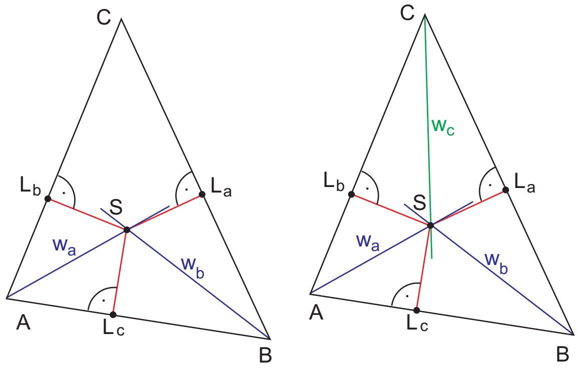
Beweis: ABC ist ein Dreieck, in dem wir die Mittelsenkrechten m_c und m_a von AB und BC betrachten. Diese beiden Mittelsenkrechten schneiden sich im Punkt S. Weil S ein Punkt der Mittelsenkrechten m_c ist, ist S von A und B gleich weit entfernt (Satz 10). Da S aber auch ein Punkt von m_a ist, ist S auch von B und C gleich weit entfernt. Folglich gilt $AS \cong CS$, und damit muss S auch auf der Mittelsenkrechten m_b von AC liegen. Damit schneiden sich die drei Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC in einem Punkt. ■



Der Schnittpunkt S der drei Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC ist damit auch von A, B und C gleich weit entfernt. Folglich geht der Kreis um S, der durch A geht, auch durch B und C. S ist damit der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Auf diesen Sachverhalt gehen wir im Kapitel 13 später noch einmal ein.

Satz 20 *Im Dreieck schneiden sich die Winkelhalbierenden in einem Punkt.*

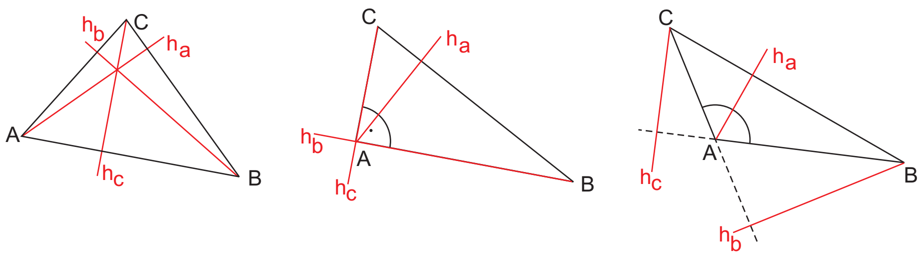
Beweis: ABC ist ein Dreieck, in dem wir die Winkelhalbierenden w_a und w_b von $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$ betrachten. Diese beiden Winkelhalbierenden schneiden sich im Punkt S. Weil S ein Punkt der Winkelhalbierenden w_a ist, ist S von AB^+ und AC^+ gleich weit entfernt (Satz 11). Da S aber auch ein Punkt von w_b ist, ist S auch von BA^+ und BC^+ gleich weit entfernt. Folglich gilt $SL_a \cong SL_b$, und damit muss S auch auf der Winkelhalbierenden w_c von $\sphericalangle ACB$ liegen. Damit schneiden sich die drei Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC in einem Punkt. ■



Der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC ist damit von AB, BC und CA gleich weit entfernt. Somit berührt der Kreis um S, der AB in L_c berührt, auch die anderen beiden Dreiecksseiten BC und CA. S ist damit der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Auch auf diesen Sachverhalt gehen wir im Kapitel 13 später noch einmal ein.

Definition 14 (Höhe) *Ist ABC ein Dreieck, so nennt man die Lote von den Ecken des Dreiecks auf die gegenüber liegenden Dreiecksseiten (oder deren Verlängerungen) die **Höhen** des Dreiecks.*

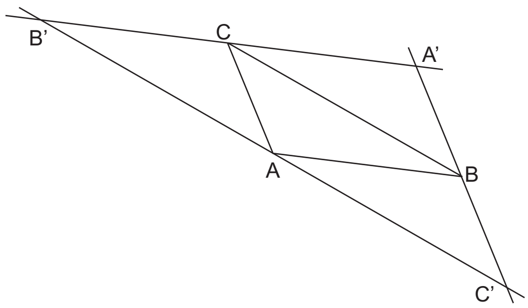
Jedes Dreieck hat drei Höhen, von jedem Eckpunkt aus genau eine. Im Bild sind die Höhen für spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke eingezeichnet. Speziell im rechtwinkligen Dreieck fallen zwei dieser Höhen mit den Katheten des Dreiecks zusammen, so dass nur eine *echte* Höhe zu erkennen ist. Diese Höhe auf der Hypotenuse bezeichnen wir auch oft nur als *die* Höhe des rechtwinkligen Dreiecks.

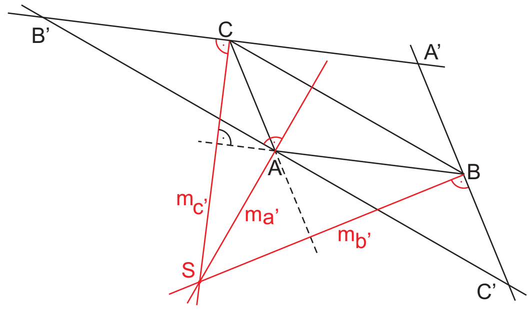


Satz 21 *Im Dreieck schneiden sich die Höhen in einem Punkt.*

Beweis: Zum Beweis des Satzes betrachten wir ein Dreieck ABC. Durch die Ecken des Dreiecks zeichnen wir die Parallele zur jeweils gegenüber liegenden Dreiecksseite. Dabei entsteht das neue Dreieck $A'B'C'$. Wir betrachten nun C auf $A'B'$. Weil $ABCB'$ aufgrund der Parallelitäten ein Parallelogramm ist, ist $AB \cong B'C$.[4] Ebenso ist $ABA'C$ ein Parallelogramm, weswegen auch $AB \cong CA'$ ist. Damit ist aber C der Mittelpunkt von $A'B'$. Analog sind A und B die Mittelpunkte von $B'C'$ bzw. $C'A'$.
Nun betrachten wir die die Mittelsenkrechten des Dreiecks $A'B'C'$, die sich in einem Punkt S schneiden (Satz 19). Weil die Mittelsenkrechte von $A'B'$ durch C geht und auf $A'B'$ senkrecht steht, ist sie auch senkrecht auf AB, also die Höhe durch C im Dreieck ABC. Analog sind die anderen beiden Mittelsenkrechten des Dreiecks $A'B'C'$ Höhen im Dreieck ABC, woraus sofort die Behauptung unseres Satzes folgt. ■

[4] Vgl. Satz 30, die Kongruenz kann aber auch einfach über eine Verschiebung gefolgert werden





Neben den Mittelsenkrechten, Winkelhalbierenden und Höhen eines Dreiecks gehören auch noch die Seitenhalbierenden zu den besonderen Linien im Dreieck. Diese schneiden sich bekanntlich auch in einem Punkt, dem Schwerpunkt des Dreiecks. Auf diesen Sachverhalt können wir im Rahmen dieses Skriptes erst später (Kapitel 17) eingehen, da wir zum Beweis dieser Eigenschaft die Ähnlichkeitssätze brauchen.

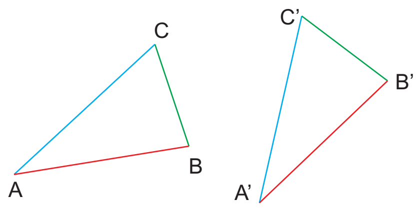
9 Kongruenzsätze für Dreiecke

Weil Dreiecke auch Figuren sind, ist klar, wann zwei Dreiecke kongruent zueinander sind (vgl. Kapitel 2): Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind genau dann kongruent zueinander, wenn es eine Bewegung gibt, die ABC auf $A'B'C'$ abbildet.

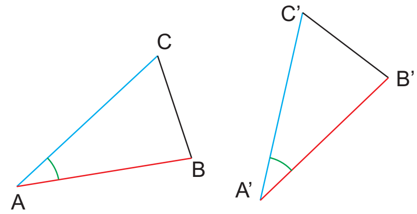
Damit ist auch klar, dass die beiden zueinander kongruenten Dreiecke in den Seitenlängen und den Größen der Innenwinkel übereinstimmen. Aber nicht nur darin, sie stimmen z.B. auch im In- und Umkreisradius, im Flächeninhalt, in den Längen der Höhen, ... überein.

Zur Überprüfung der Kongruenz zweier Dreiecke ist es aber oft umständlich, immer eine Bewegung anzugeben, die das eine auf das andere Dreieck abbildet. Zur Vereinfachung dieser Überprüfung bei Dreiecken helfen uns die Kongruenzsätze, die bereits aus dem Vergleich von drei Stücken (Seitenlängen oder Innenwinkel) beider Dreiecke auf die Kongruenz dieser beiden Dreiecke schließen. Wir kennen diese Sätze aus der Schule und haben sie bei der Konstruktion von Dreiecken aus gegebenen Stücken oder auch bei Beweisaufgaben angewandt.

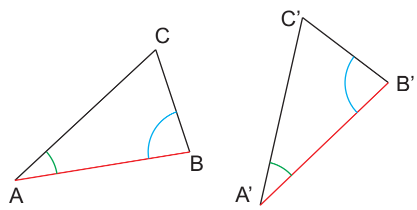
Satz 22 (Kongruenzsatz (sss)) *Stimmen zwei Dreiecke in ihren drei Seiten überein, so sind die beiden Dreiecke kongruent zueinander.*



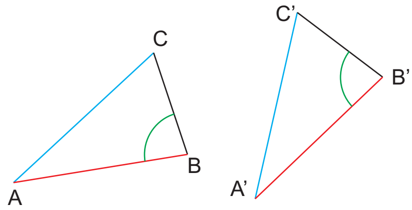
Satz 23 (Kongruenzsatz (sws)) *Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein, so sind die beiden Dreiecke kongruent zueinander.*



Satz 24 (Kongruenzsatz (wsw)) *Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und den an dieser Seite anliegenden Innenwinkeln überein, so sind die beiden Dreiecke kongruent zueinander.*



Satz 25 (Kongruenzsatz (Ssw)) *Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem Innenwinkel, der der größeren Seite gegenüber liegt, überein, so sind die beiden Dreiecke kongruent zueinander.*

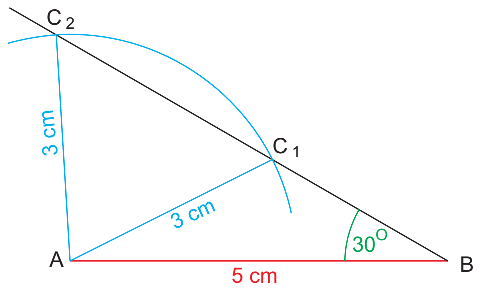


Natürlich müssen die Kongruenzsätze auch bewiesen werden. Zum Beweis müssten wir jeweils zeigen, dass aus den Voraussetzungen des jeweiligen Kongruenzsatzes auf eine Bewegung geschlussfolgert werden kann, die das eine Dreieck auf das andere abbildet.

Wir wollen hier darauf hinweisen, dass auch (sww)[5] ein Kongruenzsatz ist, der oben nicht erwähnt wurde. Der Grund dafür ist, dass dieser Kongruenzsatz aus dem Kongruenzsatz (wsw) folgt, weil die Summe der Innenwinkel im Dreieck 180° beträgt. Bei zwei gegebenen Innenwinkeln ist der dritte immer automatisch bestimmt. Aus diesem Grund muss (sww) in der euklidischen Geometrie nicht gesondert erwähnt werden.

Und noch eine Bemerkung zum Kongruenzsatz (Ssw). In den Voraussetzungen zu diesem Satz wird verlangt, dass der gegebene Winkel der größeren der beiden gegebenen Seiten gegenüber liegt. Dass diese Bedingung wichtig ist, wollen wir hier anhand der Konstruktion eines Dreiecks ABC zeigen, bei dem $|AB| = 5\text{cm}$, $|AC| = 3\text{cm}$ und $|\sphericalangle ABC| = 30°$ vorgegeben sind. Damit liegt $\sphericalangle ABC$ der kleineren der beiden gegebenen Seiten gegenüber.

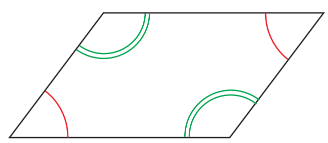
Wir konstruieren wie folgt: Zuerst zeichnen wir eine Strecke AB mit der Länge 5cm. In B tragen wir an diese Strecke den Winkel mit der Größe 30° an. Auf dem freien Schenkel dieses Winkels muss der Punkt C liegen, der zu A den Abstand 3cm hat. Um diesen Punkt zu finden, zeichnen wir um A einen Kreis mit diesem Radius. Dieser Kreis schneidet den freien Schenkel des Winkels der Größe 30° in zwei Punkten C_1 und C_2. Die beiden Dreiecke ABC_1 und ABC_2 sind offensichtlich nicht kongruent zueinander, erfüllen aber die gegebenen Voraussetzungen.



10 Sätze über Vierecke

In diesem Abschnitt stellen wir Sätze über Vierecke zusammen. Die Beweise dieser Sätze können meist mit Hilfe der Kongruenzsätze geführt werden.

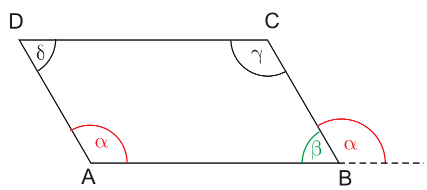
Satz 26 *Im Parallelogramm sind gegenüber liegende Innenwinkel kongruent.*



Satz 27 (Umkehrung von Satz 26) *Sind in einem Viereck gegenüber liegende Innenwinkel kongruent, so ist das Viereck ein Parallelogramm.*

Satz 28 *Im Parallelogramm ergänzen sich zwei Winkel, die an einer Seite anliegen, zu* 180°*.*

Satz 29 (Umkehrung von Satz 28) *Hat ein Viereck einen Innenwinkel, der sich mit seinen benachbarten Innenwinkeln jeweils zu* 180° *ergänzt, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.*

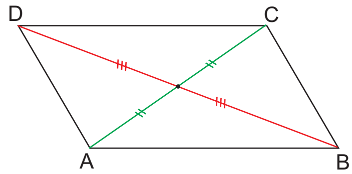


[5] Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite, einem an dieser Seite anliegenden und dem dieser Seite gegenüber liegenden Innenwinkel überein, so sind die beiden Dreiecke kongruent zueinander.

Satz 30 *Im Parallelogramm sind gegenüber liegende Seiten gleich lang.*

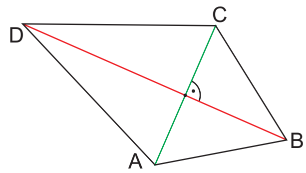
Satz 31 (Umkehrung von Satz 30) *Sind in einem Viereck gegenüber liegende Seiten gleich lang, so ist das Viereck ein Parallelogramm.*

Satz 32 *Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.*



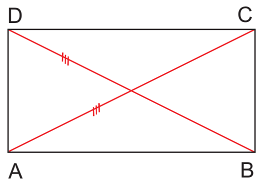
Satz 33 (Umkehrung von Satz 32) *Halbieren sich die Diagonalen in einem Viereck, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.*

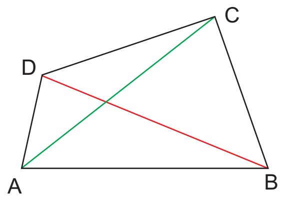
Satz 34 *Im Drachenviereck stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.*



Satz 35 *Im Rechteck sind die Diagonalen gleich lang.*

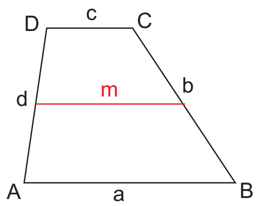
Anmerkung: Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, wie im Bild ganz rechts zu sehen ist.





Satz 36 *Die Mittellinie im Trapez (Definition 5) ist parallel zu den Grundseiten.*

Satz 37 *Die Länge der Mittellinie im Trapez ist gleich der halben Summe aus den Längen der Grundseiten:* $m = \frac{a+c}{2}$.



11 Flächeninhalt

Ebenso wie die Längen von Strecken oder die Größen von Winkeln wollen wir die Flächen von Polygonen, also von ebene Figuren, die durch endlich viele Strecken berandet sind, und von einigen allgemeineren Figuren, also Punktmengen in der Ebene, messen. Der **Flächeninhalt** $|F|$ einer Figur F ist wieder Produkt einer **Flächenmaßzahl** $a(F)$ und einer **Flächeneinheit**.

Die Flächeneinheit leitet man meist aus einer vorgegebenen Längeneinheit ab, indem man als Eichfigur ein Quadrat Q wählt, dessen Seitenlängen eine Längeneinheit betragen. Beträgt unsere Längeneinheit etwa einen Zentimeter, so sind die Seiten von Q einen Zentimeter lang und die Flächeneinheit wird $|Q| = 1\text{cm}^2$, ein Quadratzentimeter, genannt. Entsprechend erhält man auch Quadratmillimeter (1mm^2), Quadratmeter (1m^2), Quadratkilometer (1km^2) u.s.w. Wir können die jeweils abgeleitete Flächeneinheit dann auch als formales Produkt der Längeneinheit mit sich selbst betrachten: $1\text{mm}^2 = (1\text{mm}) \cdot (1\text{mm})$, $1\text{cm}^2 = (1\text{cm}) \cdot (1\text{cm})$, $1\text{m}^2 = (1\text{m}) \cdot (1\text{m})$, $1\text{km}^2 = (1\text{km}) \cdot (1\text{km})$. In abstrakteren Zusammenhängen ist es sinnvoll, sich auf keine konkreten Längen- oder Flächeneinheiten festzulegen. Wir nutzen dann die Abkürzungen LE für die Längen- und FE für die abgeleitete Flächeneinheit und erhalten den formalen Zusammenhang durch die Gleichung $(1\text{LE}) \cdot (1\text{LE}) = 1\text{LE}^2 = 1\text{FE}$.

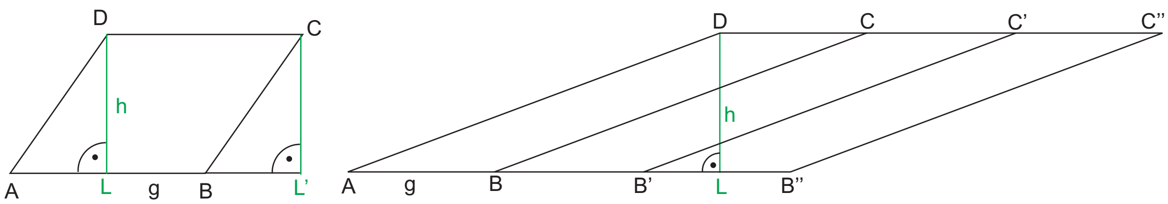
In Analogie zur Strecken- und Winkelmessung (Kapitel 3) muss auch die Flächenmaßzahl die folgenden drei Eigenschaften erfüllen:

- Wird ein Polygon P in zwei Teilpolygone P_1 und P_2 zerlegt, so gilt $a(P) = a(P_1)+a(P_2)$ (Additivität).
- Sind P und P' kongruente Polygone, so gilt $a(P) = a(P')$ (Bewegungstreue).
- Es gilt $a(Q) = 1$ (Eichung oder Normiertheit).

Über das Auszählen von Kästchen (in einem Rechteck und in der Eichfigur) und anschließende Übertragung auf reelle Zahlen erhalten wir die Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks.

Satz 38 (Flächenformel für Rechtecke) *Für ein Rechteck R mit den Seitenlängen a und b gilt $|R| = ab$.*

Betrachten wir nun ein Parallelogramm $P = ABCD$. Bezeichnen wir AB als Grundseite g (mit der Länge g), dann ist die Länge des Lotes von D (oder von C) auf die Gerade $g(AB)$ die Höhe h dieses Parallelogramms bezüglich der Grundseite g. Der Fußpunkt L des Lotes von D auf $g(AB)$ kann zur Strecke AB, also zu g, gehören oder außerhalb von g liegen.



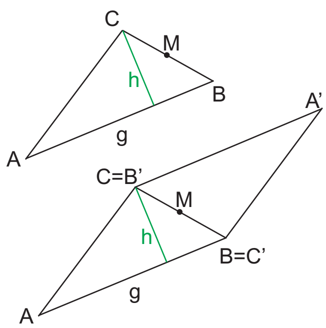
Gehört L zu g und fällt L mit A zusammen, dann ist P sogar ein Rechteck und für den Flächeninhalt von P ergibt sich sofort $|P| = gh$.

Liegt L innerhalb von g oder ist $L = B$, so betrachten wir das Dreieck ALD, das mit der Verschiebung um $\overrightarrow{AB}$ in das Dreieck $BL'C$ verschoben wird. Weil L' auf $g(AB)$ liegt und bei L' ein rechter Winkel ist, ist $LL'CD$ ein Rechteck, das zum Parallelogramm P flächengleich ist. Es gilt also $|P| = gh$.

Gehört L nicht zu g und nehmen wir o.E.d.A. an, dass B zwischen A und L liegt. Dann verschieben wir $ABCD$ n mal mit $\lambda\overrightarrow{AB}$, $\lambda = 1, 2, ..., n$, so lange, bis L innerhalb von $AB^{(n)}$ liegt. Dabei bezeichnen wir mit $B^{(n)}$ den Bildpunkt von B nach der n-ten Verschiebung. Im Bild oben ist $n = 2$ ($B^{(2)} = B''$). Nun ist $AB^{(n)}C^{(n)}D$ ein Parallelogramm, das aus $n + 1$ Parallelogrammen besteht, die jeweils kongruent zu $ABCD$ sind. Damit können wir den Flächeninhalt so berechnen, wie wir es oben überlegt haben: $|AB^{(n)}C^{(n)}D| = |AB^{(n)}| \cdot h$. Weil $|AB^{(n)}C^{(n)}D| = (n + 1)|ABCD|$ und $|AB^{(n)}| = (n + 1) \cdot |AB|$ gilt, ergibt sich $|P| = |ABCD| = gh$. Damit gilt der folgende

Satz 39 (Flächenformel für Parallelogramme) *Für ein Parallelogramm P mit Grundseitenlänge g und Höhe h über der Grundseite gilt $|P| = gh$.*

Die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks D können wir aus der Formel für den Flächeninhalt eines Parallelogramms ableiten. Bezeichnen wir mit g eine Seite eines Dreiecks und mit M den Seitenmittelpunkt einer anderen Dreiecksseite. Nun drehen wir das Dreieck um M durch $180°$. Das Original- und das Bilddreieck bilden zusammen ein Parallelogramm P. Da beide Dreiecke flächengleich sind, muss $|D| = \frac{1}{2}|P|$ gelten. Damit gilt der



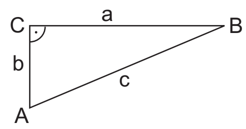
Satz 40 (Flächenformel für Dreiecke) *Für ein Dreieck D mit Grundseitenlänge g und Höhe h über der Grundseite gilt $|D| = \frac{1}{2}gh$.*

12 Der Satz des Pythagoras und seine Umkehrung

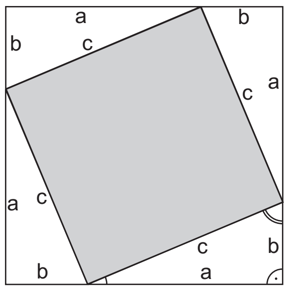
Der Satz des Pythagoras, den wir alle aus der Schule sehr gut kennen, war bereits vor Pythagoras (um 550 v.u.Z.) bekannt.

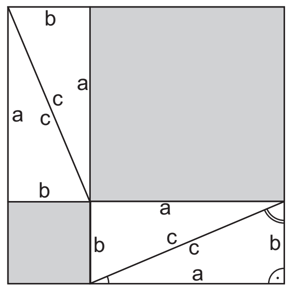
Satz 41 (Satz des Pythagoras) *In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen a, b und der Länge c der Hypotenuse gilt $c^2 = a^2 + b^2$.*

Beweis: ABC ist ein bei C rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c. Dann kann man jeweils vier zueinander kongruente Exemplare dieses Dreiecks auf verschiedene Weise in ein Quadrat der Seitenlänge $a + b$ einpassen. Die Bilder zeigen zwei solche Möglichkeiten.



Im linken Bild wird von den vier Dreiecken ein Quadrat mit der Seitenlänge c nicht bedeckt, im rechten Bild sind es zwei Quadrate, eins mit der Seitenlänge a und eins mit der Seitenlänge b, die von den vier Dreiecken nicht bedeckt werden.



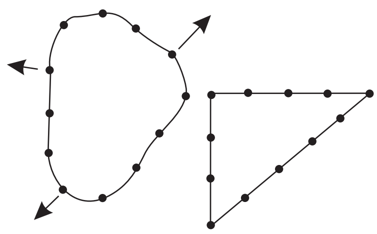


Da die beiden großen Quadrate flächengleich sind, müssen auch die Restfiguren gleiche Fläche haben, d.h., es gilt $c^2 = a^2 + b^2$. ■

Wir möchten an dieser Stelle noch erwähnen, dass der Satz des Pythagoras wohl derjenige Satz der Mathematik ist, der die meisten Beweise hat. Wer mehr dazu wissen möchte, kann sich z.B. in [2], [5] oder [10] informieren.

Die Umkehrung des Satzes des Pythagoras nutzten bereits ägyptische Seilspanner (Harpedonapten) ca. 2000 Jahre vor Pythagoras, um rechte Winkel zu erzeugen, wie sie z.B. beim Bau von Pyramiden gebraucht werden. Auch im alten Indien und China war der Satz bereits vor Pythagoras bekannt.

Die ägyptischen Seilspanner benutzten ein, zu einem Ring geschlossenes Seil, das durch 12 Knoten in 12 gleichlange Abschnitte eingeteilt war. Anschließend wurde dieser Seilring von drei Knoten aus straff gezogen, so dass sich zwischen diesen Knoten 3, 4 und 5 Seilabschnitte befanden. Auf diese Weise bildete sich ein rechter Winkel, der z.B. zum Abstecken von Feldern genutzt werden konnte.



Die drei natürlichen Zahlen 3, 4 und 5 heißen auch **pythagoreisches Zahlentripel**, weil $3^2 + 4^2 = 5^2$ gilt. Neben diesem pythagoreischen Zahlentripel gibt es beliebig viele solche Tripel natürlicher Zahlen, z.B. (6, 8, 10), (15, 112, 113), ... Rechtwinklige Dreiecke mit rationalen Seitenverhältnissen heißen auch **pythagoreische Dreiecke**.

Satz 42 (Umkehrung des Satzes des Pythagoras) *Gilt für die Seitenlängen eines Dreiecks, dass die Summe der Quadrate von zwei Seitenlängen gleich dem Quadrat der dritten Seitenlänge ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig.*

Beweis: ABC sei ein Dreieck, das die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Nun betrachten wir einen beliebigen rechten Winkel mit Scheitelpunkt C' und konstruieren auf dem ersten Schenkel einen Punkt A' durch Abtragung der Strecke CA und auf dem zweiten Schenkel einen Punkt B' durch Abtragung von CB. Nach Konstruktion gilt $|A'C'| = |AC|$ und $|B'C'| =$

$|BC|$. Da das Dreieck $A'B'C'$ rechtwinklig ist, gilt nach dem Satz des Pythagoras $|A'B'|^2 = |B'C'|^2 + |A'C'|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 = a^2 + b^2$.

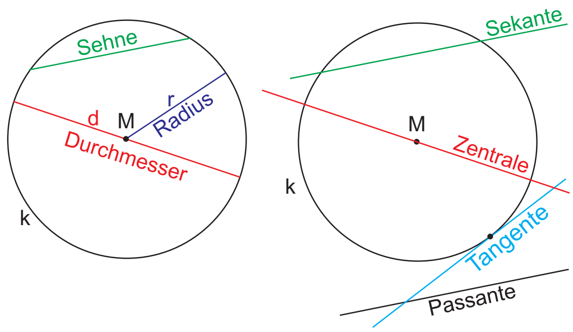
Andererseits wissen wir nach Voraussetzung, dass $|AB|^2 = c^2 = a^2 + b^2$ ist. Daraus folgt $|A'B'| = |AB|$ und die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ erfüllen die Voraussetzungen des Kongruenzsatzes (sss) (Satz 22), sind also kongruent. Insbesondere hat das Dreieck ABC dann einen rechten Winkel bei C, weil das Dreieck $A'B'C'$ nach Konstrunktion einen rechten Winkel bei C' hat. ■

13 Sätze am Kreis

In diesem Abschnitt spielt der Kreis eine zentrale Rolle. Auch hier stellen wir die relevanten Definitionen und Sätze der elementaren Schulgeometrie zusammen.

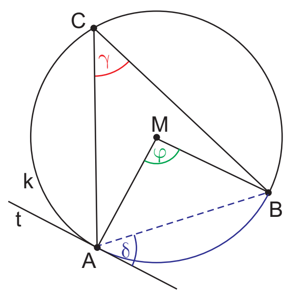
Definition 15 (Kreis) *Unter einem **Kreis** verstehen wir die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt M, dem **Mittelpunkt** des Kreises, einen konstanten Abstand r, den **Radius**, haben.*

Die Verbindungsstrecke vom Mittelpunkt zu einem Kreispunkt heißt ebenfalls **Radius**, die von zwei beliebigen Kreispunkten **Sehne**. Eine Sehne durch den Mittelpunkt des Kreises heißt **Durchmesser** des Kreises. Der Radius (und seine Länge) eines Kreises wird im Allgemeinen mit r und der Durchmesser (und seine Länge) mit d bezeichnet. Dann gilt $r = \frac{d}{2}$.



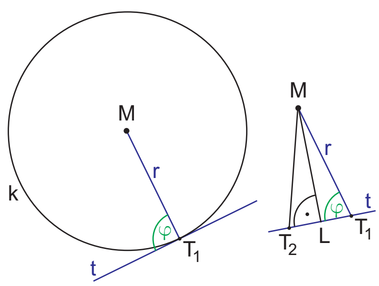
Eine Gerade, die den Kreis in zwei Punkten schneidet, heißt **Sekante**.
Eine Sekante durch den Mittelpunkt heißt **Zentrale**.
Eine Gerade, die mit dem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat, heißt **Tangente**.
Eine Gerade, die mit dem Kreis keine Punkte gemeinsam hat, heißt **Passante**.

Weiter teilen zwei Punkte A und B den Kreis in zwei Teile ein. Wir betrachten in der Regel immer den kleineren der beiden Teile und bezeichnen diesen als **Bogen** AB. Ein Winkel $\sphericalangle ACB$, bei dem die drei Punkte A, B, C auf einem Kreis k liegen, heißt **Peripheriewinkel** über AB. Der Winkel $\sphericalangle AMB$, den A und B mit dem Kreismittelpunkt M bilden, heißt **Zentriwinkel** über AB. Betrachten wir noch die Tangente t in A an den Kreis k, so bildet diese Tangente mit der Sehne AB den **Sehnentangentenwinkel**. Der Radius MA vom Mittelpunkt des Kreises zum Berührungspunkt der Tangente mit dem Kreis heißt **Berührungsradius** der Tangente.



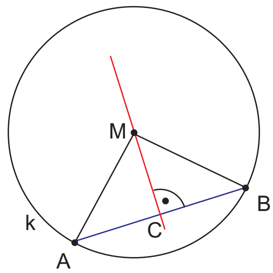
Satz 43 *Der Berührungsradius steht senkrecht auf der Tangente an einen Kreis.*

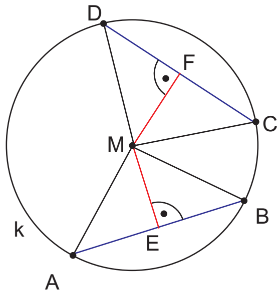
Beweis: Wir betrachten eine Gerade t, die Tangente an den Kreis k ist. Dann hat t mit k nur den Punkt T_1 gemeinsam und MT_1 ist der Berührungsradius.



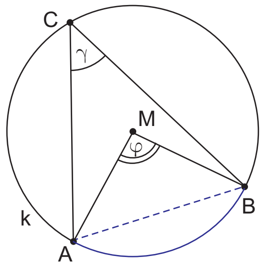
Nun nehmen wir an, dass der Winkel φ, den die Tangente mit dem Berührungsradius einschließt, kein rechter Winkel ist. Dann zeichnen wir das Lot von M auf die Tangente und bezeichnen den Lotfußpunkt mit L. Nun spiegeln wir an diesem Lot, wobei der Kreis und die Tangente auf sich und der Punkt T_1 auf T_2 abgebildet wird. Es ist dann $MT_2 \cong MT_1$ und folglich hat t mit k außer den Punkt T_1 noch einen weiteren Punkt T_2 gemeinsam. Damit ist t aber keine Tangente, im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Satz 44 *Die Mittelsenkrechte auf einer Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises und halbiert den Zentriwinkel.*



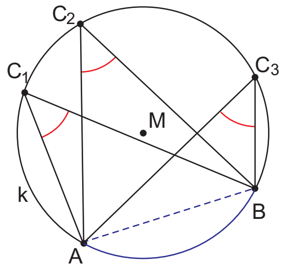


Satz 45 *Sehnen gleicher Länge haben den gleichen Abstand zum Kreismittelpunkt.*



Satz 46 (Zentri-Peripheriewinkel-Satz) *Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen.*

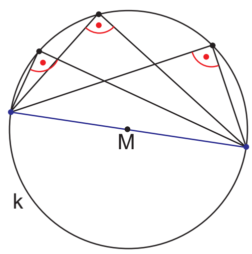
Aus dem Zentri-Peripheriewinkel-Satz ergibt sich sofort der folgende



Satz 47 (Peripheriewinkelsatz) *Peripheriewinkel über demselben Bogen sind kongruent.*

Satz 48 (Umkehrung von Satz 47) *Liegen über einer Strecke AB $(A \neq B)$ zwei kongruente Winkel $\sphericalangle AC_1B$ und $\sphericalangle AC_2B$, so liegen A, B, C_1 und C_2 auf einem Kreis.*

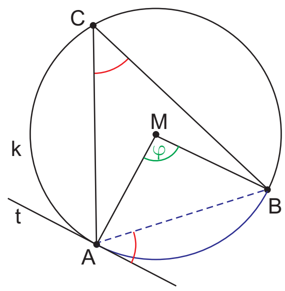
Satz 49 (Satz des Thales) *Jeder Peripheriewinkel über einem Durchmesser eines Kreises ist ein rechter Winkel.*



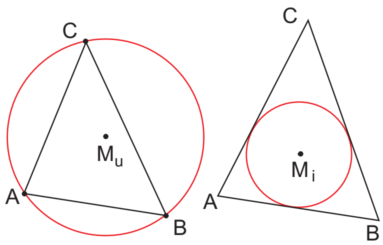
Anmerkung: Fassen wir den Durchmesser eines Kreises auch als eine Sehne dieses Kreises auf, so können wir zu diesem Durchmesser auch Peripheriewinkel betrachten. Der zugehörige Zentriwinkel hat eine Größe von 180°. Damit ordnet sich aber der Satz des Thales als Spezialfall in den Zentri-Peripheriewinkel-Satz (Satz 46) ein.

Satz 50 (Umkehrung von Satz 49) *Ist ABC ein bei C rechtwinkliges Dreieck, so liegt C auf dem Kreis um den Mittelpunkt von AB durch A.*

Satz 51 (Sehnentangentenwinkelsatz) *Der Sehnentangentenwinkel ist kongruent zu dem Peripheriewinkel über demselben Bogen.*



Definition 16 (Umkreis) *Der Kreis, der durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks geht, heißt **Umkreis** des Dreiecks.*

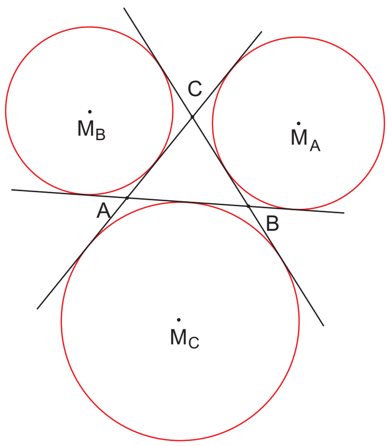


Anmerkung: *Jedes Dreieck besitzt genau einen Umkreis.*

Definition 17 (Inkreis) *Der Kreis, der die drei Seiten eines Dreiecks von innen berührt, heißt **Inkreis** des Dreiecks.*

Anmerkung: *Jedes Dreieck besitzt genau einen Inkreis.*

Definition 18 (Ankreis) *Ein Kreis, der eine Dreiecksseite von außen und die Verlängerungen der anderen beiden Seiten von innen berührt, heißt **Ankreis** des Dreiecks.*



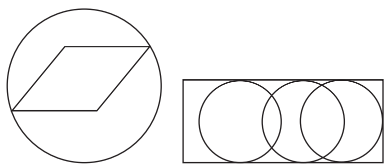
Anmerkung: *Jedes Dreieck hat drei Ankreise.*

Wie wir bereits aus Satz 19 bzw. 20 wissen, hat jedes Dreieck genau einen Umkreis und genau einen Inkreis. Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks.
Für Vierecke kann man auch die Begriffe Um- und Inkreis festlegen. Ein Umkreis ist dann in Analogie zum Dreieck ein Kreis, der durch alle vier Ecken des Vierecks geht – wir bezeichnen solche Vierecke als Sehnenvierecke (Definition 19).

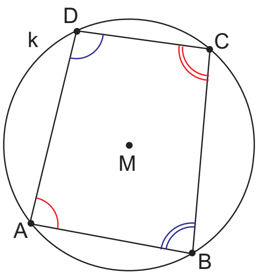
Ein Inkreis ist entsprechend ein Kreis, der alle vier Seiten des Vierecks von innen berührt – wir bezeichnen solche Vierecke als Tangentenvierecke (Definition 20).

Im obigen Sinne hat ein Rhombus, der von einem Quadrat verschieden ist, keinen Umkreis und ein (echtes) Rechteck keinen Inkreis.

Definiert man allerdings den Umkreis eines Vierecks als den kleinsten Kreis, der das Viereck enthält, und den Inkreis als den größten Kreis, der in einem Viereck enthalten ist, dann hat jedes Viereck einen Um- und einen Inkreis. Der Umkreis ist dann eindeutig bestimmt, während das für den Inkreis nicht gilt, wie es das Beispiel eines (echten) Rechteckes zeigt.



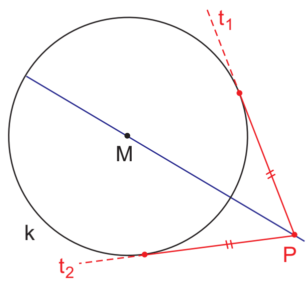
Definition 19 (Sehnenviereck) *Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, heißt **Sehnenviereck**.*



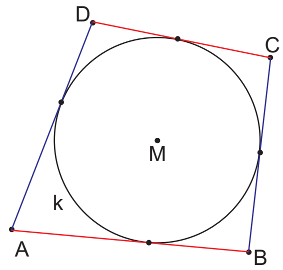
Satz 52 *In jedem Sehnenviereck ergänzen sich die Gegenwinkel zu* $180°$.

Satz 53 (Umkehrung von Satz 52) *Ergänzen sich zwei Gegenwinkel in einem Viereck zu* $180°$, *so ist das Viereck ein Sehnenviereck.*

Satz 54 *Zeichnet man von einem Punkt außerhalb eines Kreises die Tangenten an diesen Kreis, so sind die entstehenden Tangentenabschnitte gleichlang.*



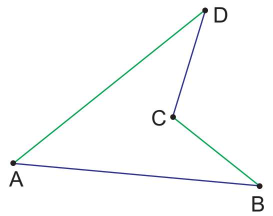
Definition 20 (Tangentenviereck) *Ein Viereck, dessen Seiten Tangenten an einen Kreis sind, heißt* ***Tangentenviereck****.*



Satz 55 *In jedem Tangentenviereck ist die Summe zweier gegenüber liegender Seitenlängen gleich der Summe der anderen beiden Seitenlängen.*

Satz 56 (Umkehrung von Satz 55) *Ist in einem konvexen Viereck $ABCD$ die Summe von gegenüber liegenden Seitenlängen gleich, dann ist das Viereck ein Tangentenviereck.*

Anmerkung: Die im Satz gemachte Einschränkung auf die Betrachtung konvexer Vierecke ist notwendig, wie das nebenstehende Bild eines konkaven Vierecks zeigt. Obwohl die Summe gegenüber liegender Seitenlängen gleich ist, handelt es sich nicht um ein Tangentenviereck.



14 Umfang und Flächeninhalt eines Kreises

Sowohl die Formel zur Berechnung des Umfanges als auch die für den Flächeninhalt eines Kreises sind aus der Schule bekannt.

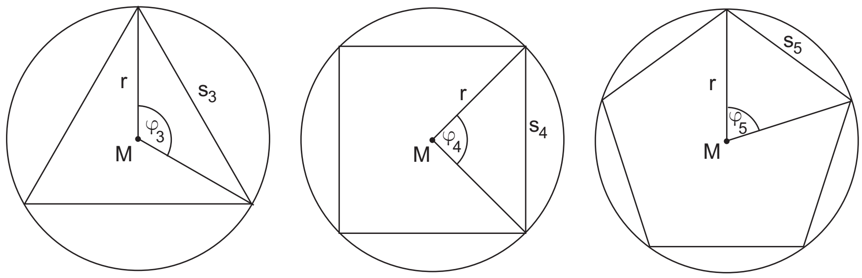
Die Umfangsformel wird oft experimentell hergeleitet, indem man den Umfang und den Durchmesser von verschiedenen Kreisen misst. Diese Messergebnisse werden tabellarisch erfasst und dann das Verhältnis aus Umfang und Durchmesser gebildet. Dabei wird festgestellt, dass dieses Verhältnis bei allen Kreisen etwa gleich ist und einen Wert von ca. 3,1 annimmt.[6] Dieser Wert wird als Kreiszahl π bezeichnet und man teilt mit, dass $\pi = 3,14...$ eine irrationale Zahl ist. Damit wird eine Formel für den Umfang eines Kreises motiviert, deren exakte Begründung auf der letzten Fußnote beruht.

	u in cm	d in cm	$\frac{u}{d}$
Suppenteller			
Kaffeetasse			
...			
Fahrradrad			
...			

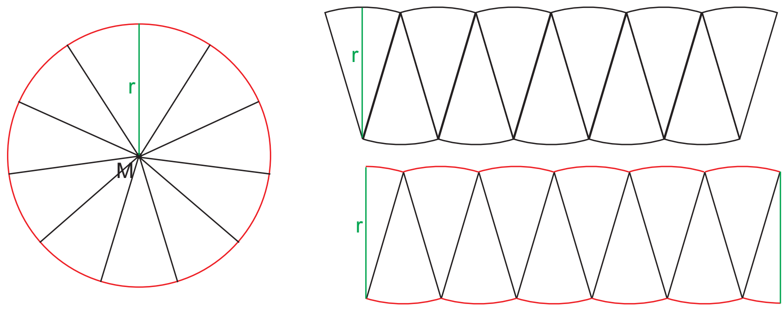
Satz 57 (Umfang eines Kreises) *Ist k ein Kreis mit dem Radius r bzw. dem Durchmesser d, so gilt für den Umfang u dieses Kreises $u = 2\pi r$ bzw. $u = \pi d$.*

Eine exakte Bestimmung von π ist z.B. möglich, wenn man man in einen Kreis mit gegebenem Radius regelmäßige Vielecke einbeschreibt und den zugehörigen Umfang berechnet. Lässt man die Eckenzahl immer größer werden, dann nähert sich der Umfang des Vielecks immer mehr dem Kreisumfang an. Diese Überlegungen bleiben aber den entsprechenden fachmathematischen Lehrveranstaltungen vorbehalten.

[6] Weil alle Kreise untereinander ähnlich sind, folgt natürlich auch sofort, dass der Quotient aus Umfang und Durchmesser eines Kreises eine Konstante sein muss. Die Ähnlichkeit von Figuren besprechen wir aber erst im nächsten Abschnitt.

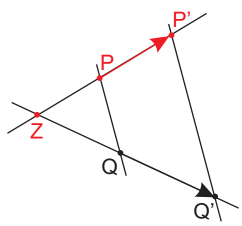


Auch die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises k mit dem Radius r kann anschaulich gut hergeleitet werden. Dazu wird der Kreis in n gleichgroße Ausschnitte („Tortenstücke“) eingeteilt, entsprechend zerschnitten und neu zusammengesetzt, wie es im Bild gezeigt ist. Halbiert man nun auch noch das erste Stück und setzt es passend an das letzte, so entsteht fast ein Rechteck, bei dem eine Seite die Länge r und die andere die Länge des halben Kreisumfanges $\frac{u}{2}$ hat. Erhöht man auch hier die Anzahl der Kreisausschnitte, so nähert sich die zusammengesetze Figur immer besser einem Rechteck mit den genannten Seitenlängen an. Folglich gilt $|k| = r \cdot \frac{u}{2} = r \cdot \frac{2\pi r}{2} = \pi r^2$.

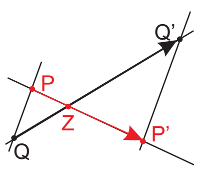


Satz 58 (Flächeninhalt eines Kreises) *Ist k ein Kreis mit dem Radius r, so gilt für den Flächeninhalt dieses Kreises $|k| = \pi r^2$ bzw. $|k| = \frac{1}{4}\pi d^2$.*

15 Ähnlichkeit und Strahlensätze



Bei der Einführung der Kongruenz von Figuren spielte eine besondere Sorte von Abbildungen, die Bewegungen (Verschiebungen, Drehungen, Geradenspiegelungen und Hintereinanderausführungen dieser Bewegungen), eine wichtige Rolle. Analog wird jetzt bei der Einführung der Ähnlichkeit von zwei Figuren ebenfalls eine besondere Abbildung, die zentrische Streckung, eine wichtige Rolle spielen.



Zur Erinnerung: Eine **zentrische Streckung** ist durch einen Punkt Z, das **Streckzentrum**, einen Originalpunkt $P(\neq Z)$ und einen zugehörigen Bildpunkt $P'(\neq Z)$, wobei Z, P und P' auf einer Geraden liegen, festgelegt.

Q sei ein weiterer Punkt, der nicht auf $g(ZP)$ liegt. Der Bildpunkt Q' von Q ist zu bestimmen. Dazu zeichnen wir die Gerade durch Z und Q und bestimmen den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Parallelen durch P' zu PQ. Dieser Schnittpunkt ist der gesuchte Bildpunkt Q'.

Liegt Q jedoch auf der Geraden durch Z und P, so wählen wir einen weiteren Punkt H, der nicht auf dieser Geraden liegt und bestimmen den zugehörigen Bildpunkt H'. Anschließend bilden wir Q mit der durch Z und H, H' bestimmten zentrischen Streckung ab.

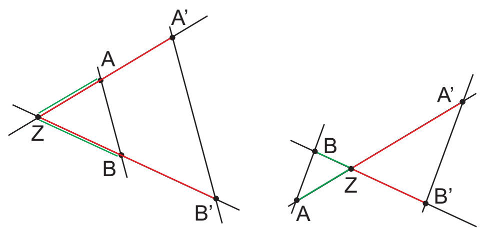
Zu beachten ist noch, dass das Zentrum Z bei einer zentrischen Streckung immer auf sich abgebildet wird. Es gilt also $Z' = Z$. Der Punkt Z ist der Fixpunkt dieser Abbildung.

Definition 21 (Ähnlichkeitsabbildung) *Eine* ***Ähnlichkeitsabbildung*** *ist eine Hintereinanderausführung von endlich vielen Bewegungen und zentrischen Streckungen.*

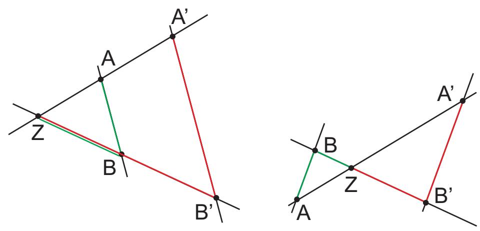
Definition 22 (Ähnlichkeit) *Zwei Figuren F_1 und F_2 heißen* ***ähnlich*** *zueinander, $F_1 \sim F_2$, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die F_1 auf F_2 abbildet.*

Eine zentrale Rolle bei der Behandlung der Ähnlichkeit spielen die Strahlensätze.

Satz 59 (erster Strahlensatz) *Werden zwei sich schneidende Geraden durch zwei parallele Geraden (die nicht durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden verlaufen) geschnitten, so verhalten sich die Längen der Abschnitte auf der ersten Geraden wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf der zweiten Geraden.*



Satz 60 (zweiter Strahlensatz) *Werden zwei sich schneidende Geraden durch zwei parallele Geraden (die nicht durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden verlaufen) geschnitten, so verhalten sich die Längen der Parallelenabschnitte wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf einer der geschnittenen Geraden.*

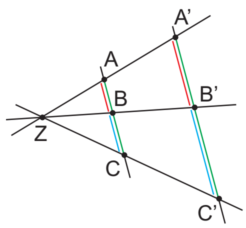


Wir möchten auf eine wichtige Konsequenz hinweisen:

Folgerung: *Haben drei Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt und werden sie von zwei parallelen Geraden (die nicht durch diesen Schnittpunkt verlaufen) geschnitten, so verhalten sich die Längen der Abschnitte auf der einen Parallelen wie die Längen der Abschnitte auf der zweiten Parallelen.*

Die letzte Behauptung ist offenbar äquivalent zu $\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$ (siehe Abbildung) und folgt deshalb aus dem zweiten Strahlensatz mittels

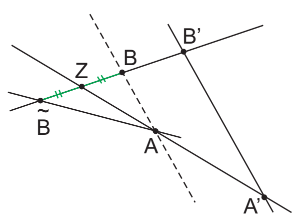
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|ZB'|}{|ZB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}.$$



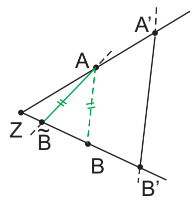
Man kann die Strahlensätze auch so lesen: Werden zwei sich schneidende Geraden von zwei weiteren Geraden geschnitten, so folgt aus der Parallelität der beiden Schnittgeraden die Identität gewisser Längenverhältnisse. Folgt aber auch umgekehrt aus der Gleichheit der Verhältnisse die Parallelität der Schnittgeraden? Diese Frage erfordert eine differenzierte Antwort.

Satz 61 (Umkehrung des ersten Strahlensatzes) *Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei Geraden (die nicht durch diesen Anfangspunkt verlaufen) geschnitten, so dass sich die Längen der Abschnitte auf dem ersten Strahl wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf dem zweiten Strahl verhalten, dann sind die Geraden parallel.*

Anders als beim ersten Strahlensatz, bei dem zwei Geraden von zwei parallelen Geraden geschnitten werden, haben wir in der Formulierung der Umkehrung nur zwei Strahlen mit zwei Geraden geschnitten. Die Abbildung zeigt, dass diese Einschränkung wirklich wichtig ist: Obwohl die Identität $\frac{|ZA'|}{|ZA|} = \frac{|ZB'|}{|Z\tilde{B}|}$ gilt, sind die Geraden $g(A'B')$ und $g(A\tilde{B})$ nicht parallel.



Die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes ist nicht einmal richtig, wenn man sich auf geschnittene Strahlen beschränkt. In der Abbildung gilt $\frac{|A'B'|}{|A\tilde{B}|} = \frac{|ZA'|}{|ZA|}$, aber $g(A'B')$ und $g(A\tilde{B})$ sind nicht parallel.



Abschließend wollen wir noch auf eine wichtige Eigenschaft der Ähnlichkeitsabbildungen hinweisen.

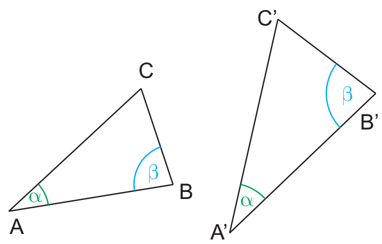
Satz 62 (Winkeltreue der Ähnlichkeitsabbildungen) *Jede Ähnlichkeitsabbildung bildet Winkel stets auf dazu kongruente Winkel ab.*

Aufgrund der Strahlensätze können wir jeder zentrischen Streckung, und damit auch jeder Ähnlichkeitsabbildung, eine reelle Zahl λ, den **Streckfaktor** oder **Ähnlichkeitsfaktor**, zuordnen: $\lambda = \frac{|ZP'|}{|ZP|}$. Dies ist sinnvoll, da für jedes beliebige Paar X und X' auch $\frac{|ZX'|}{|ZX|} = \lambda$ ist und weiterhin auch für jede Original- und Bildstrecke $\frac{|P'X'|}{|PX|} = \lambda$ gilt.

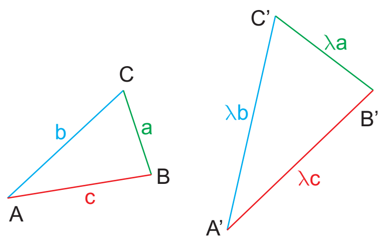
16 Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Im Kapitel 9 haben wir Kriterien für die Kongruenz von besonders wichtigen Figuren, nämlich von Dreiecken, kennengelernt. Entsprechende Überlegungen stellen wir nun für die Ähnlichkeit von Dreiecken an. Sind zwei Dreiecke ähnlich, so haben einander entsprechende Seitenlängen dasselbe Verhältnis und einander entsprechende (Innen-)Winkel sind kongruent. Welche Identitäten von Längenverhältnissen oder welche Winkelkongruenzen sichern aber umgekehrt die Ähnlichkeit zweier Dreiecke? Diese Frage beantworten die Ähnlichkeitssätze. Wir sagen hier, dass die Seiten a und b eines Dreiecks ABC mit den Seiten a' und b' eines Dreiecks $A'B'C'$ im **gleichen Längenverhältnis** stehen, wenn für ihre Längen die Gleichung $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ gilt.

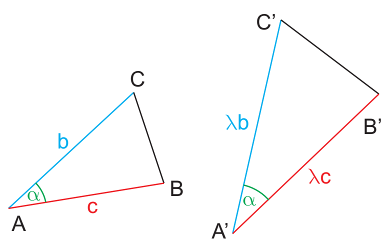
Satz 63 (Ähnlichkeitssatz (ww)) *Haben zwei Dreiecke zwei Paare kongruenter Winkel, so sind die Dreiecke ähnlich.*



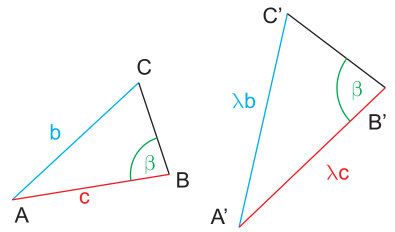
Satz 64 (Ähnlichkeitssatz (sss)) *Stehen alle drei Seiten zweier Dreiecke im gleichen Längenverhältnis, so sind die Dreiecke ähnlich.*



Satz 65 (Ähnlichkeitssatz (sws)) *Stehen zwei Seitenpaare zweier Dreiecke im gleichen Längenverhältnis und sind die eingeschlossenen Winkel kongruent, so sind die Dreiecke ähnlich.*



Satz 66 (Ähnlichkeitssatz (Ssw)) *Stehen zwei Seitenpaare zweier Dreiecke im gleichen Längenverhältnis und sind die der davon jeweils größeren Seite gegenüber liegenden Winkel kongruent, so sind die Dreiecke ähnlich.*

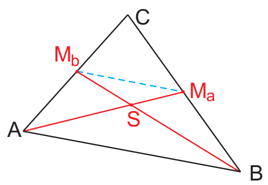


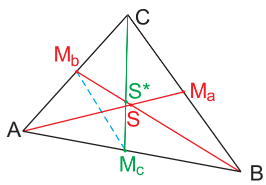
17 Besondere Linien im Dreieck: Die Seitenhalbierenden

Zu den besonderen Linien im Dreieck gehören insbesondere die Mittelsenkrechten, die Winkelhalbierenden, die Höhen und die Seitenhalbierenden. Von den Mittelsenkrechten, den Winkelhalbierenden und den Höhen eines beliebigen Dreiecks haben wir bereits gezeigt, dass sich die entsprechenden Linien jeweils in einem Punkt schneiden (Sätze 19, 20 und 21). Nachdem wir die Strahlensätze zur Verfügung haben, können wir auch den entsprechenden Satz über die Seitenhalbierenden eines Dreiecks beweisen.

Definition 23 (Seitenhalbierende) *Ist ABC ein Dreieck, so nennt man die Verbindungsstrecken von den Ecken des Dreiecks zu den Mittelpunkten der gegenüber liegenden Dreiecksseiten die* ***Seitenhalbierenden*** *des Dreiecks.*

Satz 67 (Seitenhalbierende im Dreieck) *Im Dreieck schneiden sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt. Dieser Schnittpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis* $2:1$.





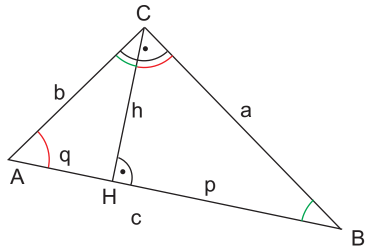
Beweis: ABC sei ein beliebiges Dreieck. Wir betrachten die beiden Seitenhalbierenden von AC und BC, die sich im Punkt S schneiden. M_b und M_a sind die Mittelpunkte von AC und BC. Durch Anwendung der Umkehrung des ersten Strahlensatzes (Satz 61) und anschließend des zweiten Strahlensates (Satz 60), jeweils mit Zentrum C, erhalten wir die Parallelität von M_bM_a zu AB und $|M_bM_a| = \frac{1}{2}|AB|$. Daraus ergibt sich mit dem ersten Strahlensatz (Satz 59), diesmal mit Zentrum S, dass $\frac{|AS|}{|SM_a|} = \frac{|BS|}{|SM_b|} = \frac{2}{1}$ ist. Der Punkt S teilt damit die beiden Seitenhalbierenden AM_a und BM_b im Verhältnis $2:1$.

Nehmen wir nun die dritte Seitenhalbierende hinzu, die C mit dem Mittelpunkt M_c von AB verbindet. Den Schnittpunkt von CM_c mit BM_b bezeichnen wir mit S^*. Mit den selben Überlegungen von oben folgt, dass S^* sowohl CM_c als auch BM_b im Verhältnis $2:1$ teilt. Da aber BM_b bereits von S in diesem Verhältnis (immer vom Eckpunkt aus) geteilt wird, muss $S^* = S$ sein. Damit schneiden sich die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks in genau einem Punkt. Dieser Schnittpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$. ■

Den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks nennt man auch den **Schwerpunkt** des Dreiecks.

18 Satzgruppe des Pythagoras

Neben dem Satz des Pythagoras (Satz 41), den wir bereits bewiesen haben, gehören noch der Höhensatz und der Kathetensatz zur Satzgruppe des Pythagoras. Wir betrachten ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC, in dem wir die Höhe von C auf AB einzeichnen. H bezeichnet den Höhenfußpunkt auf AB. Durch H wird die Hypotenuse in zwei Abschnitte der Längen $p = |BH|$ und $q = |AH|$ eingeteilt.



Durch das Einzeichnen der Höhe h wird das große rechtwinklige Dreieck ABC in zwei kleinere rechtwinklige Dreiecke AHC und CHB zerlegt. Wegen des Ähnlichkeitssatzes (ww) (Satz 63) sind diese drei Dreiecke ähnlich zueinander. Daher stimmen auch entsprechende Seitenverhältnisse überein.

Aus $AHC \sim CHB$ folgt $\frac{h}{q} = \frac{p}{h}$ und damit $h^2 = p \cdot q$.

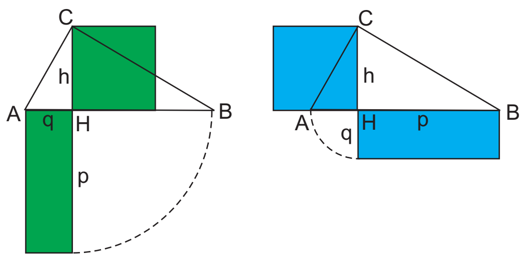
Aus $AHC \sim ACB$ folgt $\frac{q}{b} = \frac{b}{c}$ und damit $b^2 = q \cdot c$.

Aus $CHB \sim ACB$ folgt $\frac{p}{a} = \frac{a}{c}$ und damit $a^2 = p \cdot c$.

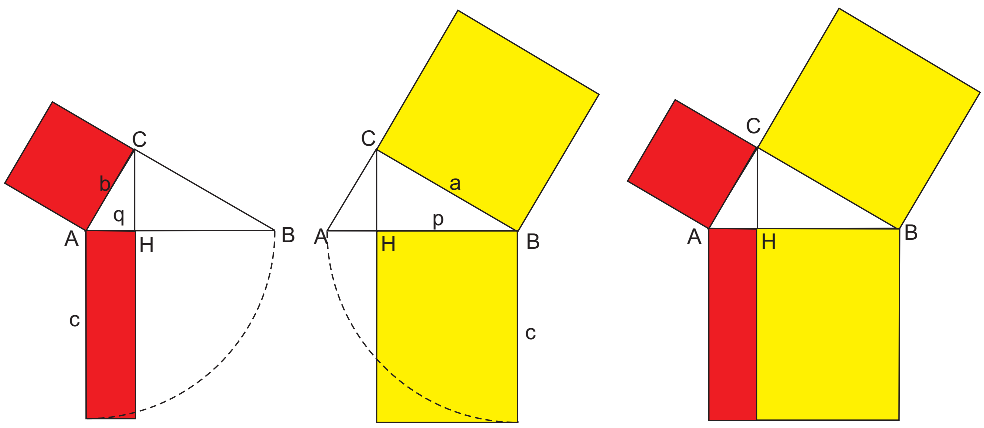
Damit haben wir aber die Beziehungen für die Höhe und die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks hergeleitet und es gelten die beiden folgenden Sätze.

Satz 68 (Höhensatz) *In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Länge der Höhe auf die Hypotenuse gleich dem Produkt den Längen der Hypotenusenabschnitte.*

Damit eignet sich der Höhensatz z.B. für die Konstruktion eines Quadrates, das flächengleich zu einem gegebenen Rechteck ist. Folglich können wir damit auch Strecken der Länge $\sqrt{n}$ konstruieren, wenn wir z.B. ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und n wählen.



Satz 69 (Kathetensatz) *In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathetenlänge gleich dem Produkt aus der Länge der Hypotenuse und der Länge des an der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnittes.*

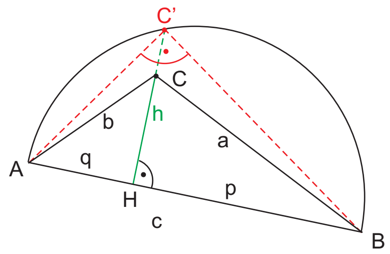


Wie im Bild zu sehen ist, ergibt sich aus der Anwendung des Kathetensatzes auf beide Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sofort auch der Satz des Pythagoras.

Es lassen sich auch Umkehrungen zu den letzten beiden Sätzen formulieren.

Satz 70 (Umkehrung des Höhensatzes) *In einem Dreieck ABC teile der Fußpunkt H der durch C verlaufenden Höhe die Seite AB in zwei Strecken der Längen $|AH| = q$ und $|BH| = p$. Gilt für die Höhenlänge $h = |CH|$ die Gleichung $h^2 = pq$, so ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C.*

Beweis: Wir schneiden den Thaleskreis über der Strecke AB (also den Kreis um den Mittelpunkt von AB durch die Punkte A und B) mit dem Strahl HC^+ und nennen den Schnittpunkt C'.



Nach dem Satz des Thales (Satz 49) hat das Dreieck ABC' einen rechten Winkel bei C'. Für seine Höhe $C'H$ gilt nach dem Höhensatz $|C'H|^2 = pq$. Nach Voraussetzung gilt aber auch $h^2 = pq$ und wir erhalten $|C'H| = h = |CH|$. Demnach gilt $C' = C$ und unser vorgegebenes Dreieck ABC ist identisch mit dem konstruierten rechtwinkligen Dreieck ABC'. ■

Satz 71 (erste Umkehrung des Kathetensatzes) *In einem Dreieck ABC teile der Fußpunkt H der durch C verlaufenden Höhe die Seite AB in zwei Strecken der Längen $|AH| = q$ und $|BH| = p$. Gilt für die Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |AC|$ und $c = |AB|$ wenigstens eine der Gleichungen $a^2 = pc$ oder $b^2 = qc$, so ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C.*

Beweis: Wir setzen die Gleichung $a^2 = pc$ voraus. (Der Fall $b^2 = qc$ kann völlig analog behandelt werden.)

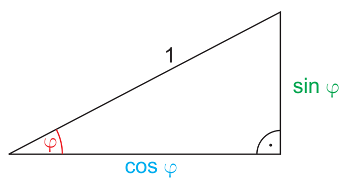
Wieder gewinnen wir den Punkt C' als Schnitt des Thaleskreises über AB mit dem Strahl HC^+ (vgl. vorige Abbildung) und erhalten nach dem Satz des Thales ein Dreieck ABC' mit rechtem Winkel bei C'. Für dieses Dreieck liefert der Kathetensatz $|BC'|^2 = pc$. Wegen der Voraussetzung $a^2 = pc$ folgt nun $|BC'| = a = |BC|$. Also sind sowohl C' als auch C Schnittpunkte des Kreises um B vom Radius a mit dem Strahl HC^+. Da es nur einen solchen Schnittpunkt gibt, erhalten wir $C' = C$ und unser vorgegebenes Dreieck ABC ist identisch mit dem konstruierten rechtwinkligen Dreieck ABC'. ■

Satz 72 (zweite Umkehrung des Kathetensatzes) *In einem Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |AC|$ und $c = |AB|$ teile ein Punkt D die Seite AB in zwei Strecken der Längen $q = |AD|$ und $p = |BD|$. Wenn beide Gleichungen $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$ gelten, dann ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C.*

Beweis: Da AB in AD und BD geteilt ist, folgt $c = |AB| = |AD| + |BD| = q + p = p + q$. Unsere Voraussetzung liefert $a^2 + b^2 = pc + qc = (p+q)c = c^2$. Nun können wir die Umkehrung des Satzes des Pythagoras anwenden und erhalten die gewünschte Rechtwinkligkeit. ■

19 Ebene Trigonometrie

Die Winkelfunktionen **Sinus** und **Kosinus** kann man für Winkelgrößen φ zwischen $0°$ und $90°$ an rechtwinkligen Dreiecken geometrisch einführen: Man betrachte dazu ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenlänge 1(LE) und einem an der Hypotenuse anliegenden Winkel der Größe φ. Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme hat der andere Innenwinkel an der Hypotenuse die Größe $90° - \varphi$ und man kann so ein Dreieck durch Abtragung



solcher Winkel an einer Strecke der Länge 1(LE) konstruieren. Nach dem Kongruenzsatz (wsw) ist das Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Damit sind auch die beiden Kathetenlängen fixiert. Die Maßzahl der dem Winkel φ gegenüber liegenden Kathete nennen wir $\sin\varphi$, die der anliegenden Kathete $\cos\varphi$. Nach dem Satz des Pythagoras folgt $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi = 1$, wobei $\sin^2\varphi$ und $\cos^2\varphi$ für $(\sin\varphi)^2$ bzw. $(\cos\varphi)^2$ stehen.

Hat ein rechtwinkliges Dreieck mit beliebiger Hypotenusenlänge einen Winkel der Größe φ, so ist es nach dem Ähnlichkeitssatz (ww) zum oben konstruierten Dreieck ähnlich und weist insbesondere die gleichen Seitenlängenverhältnisse auf. Für ein solches rechtwinkliges Dreieck ergeben sich die Merkregeln

$$\sin\varphi = \frac{\text{“Gegenkathete”}}{\text{“Hypotenuse”}} \qquad \text{und} \qquad \cos\varphi = \frac{\text{“Ankathete”}}{\text{“Hypotenuse”}},$$

wobei man natürlich eigentlich exakter von den Längen der genannten Seiten sprechen müsste.

Wir wollen nun $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ auch für Größen φ erklären, die nicht zwischen $0°$ und $90°$ liegen. Im Sinne von Grenzprozessen setzen wir

$$\sin 0° = 0, \qquad \sin 90° = 1, \qquad \cos 0° = 1 \qquad \text{und} \qquad \cos 90° = 0.$$

Weiterhin fordern wir, dass Sinus eine **ungerade** und Kosinus eine **gerade** Funktion sein soll, also

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi \qquad \text{und} \qquad \cos(-\varphi) = \cos\varphi.$$

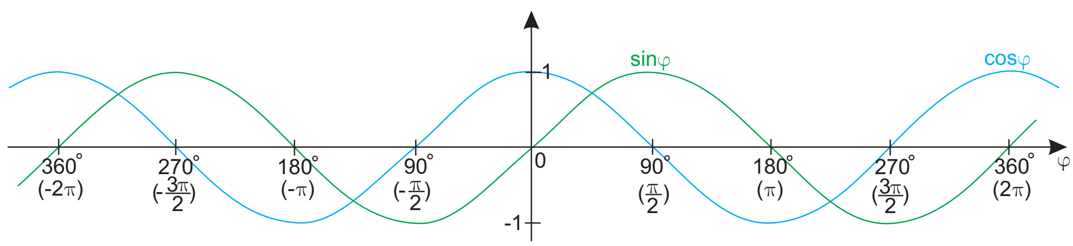
Damit sind die Funktionen für $-90° \le \varphi \le 90°$ definiert. Schließlich verlangen wir

$$\sin(\varphi + 180°) = -\sin\varphi \qquad \text{und} \qquad \cos(\varphi + 180°) = -\cos\varphi.$$

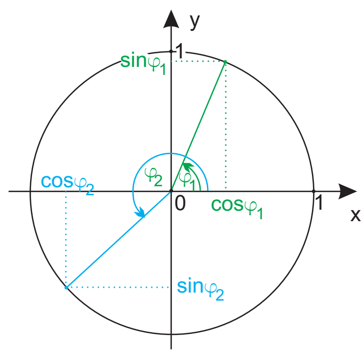
Damit werden unsere Funktionen auf den Bereich von $-90°$ bis $270°$ fortgesetzt. Wendet man die letzte Regel zweimal an, erhält man

$$\sin(\varphi + 360°) = \sin\varphi \qquad \text{und} \qquad \cos(\varphi + 360°) = \cos\varphi,$$

also sind Sinus und Kosinus periodische Funktionen mit Periodenlänge $360°$. Dadurch sind die Funktionen nun für beliebige reelle Größen φ erklärt:



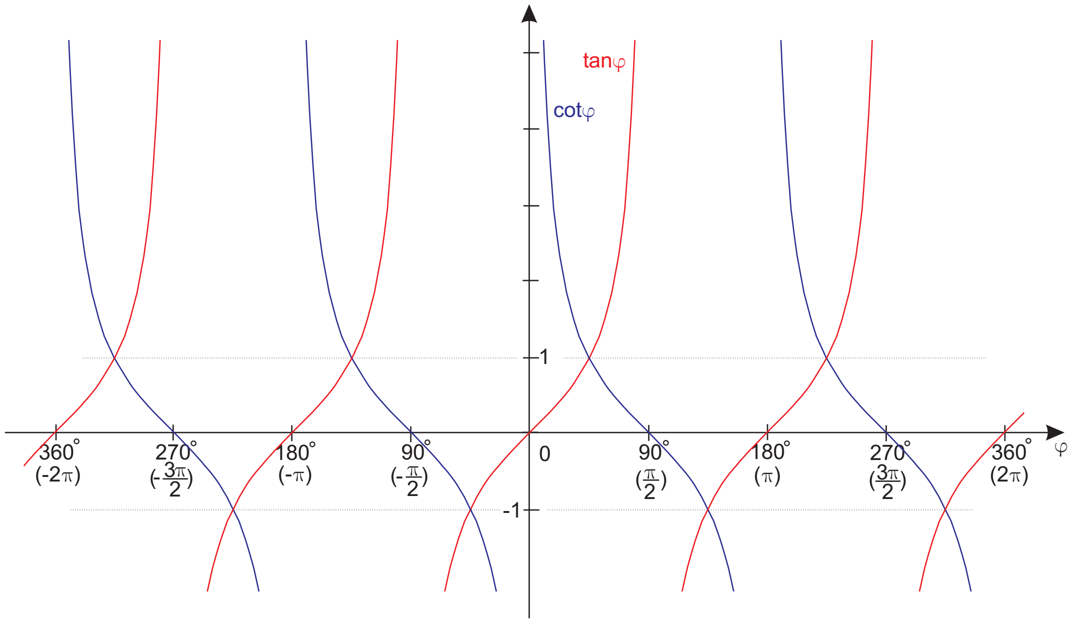
Die Funktionswerte $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ kann man sich auch anhand eines Punktes veranschaulichen, der im Abstand von 1(LE) um den Koordinatenursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems rotiert. Dazu betrachten wir den Punkt $(1, 0)$, also den Einheitspunkt auf der x-Achse. Diesen drehen wir um den Koordinatenursprung um den Winkel φ entgegen des Uhrzeigersinns. (Wir lassen beliebige Werte φ zu. Ist $\varphi > 360°$, erfolgt mehr als eine Umdrehung. Ist $\varphi < 0°$, so bedeutet dies, dass im Uhrzeigersinn gedreht wird.) Der Bildpunkt hat dann die Koordinaten $(\cos\varphi, \sin\varphi)$.



Von Sinus und Kosinus abgeleitete Winkelfunktionen sind **Tangens** und **Kotangens**, nämlich

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad (\text{falls } \cos\varphi \neq 0) \qquad \text{und} \qquad \cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \quad (\text{falls } \sin\varphi \neq 0).$$

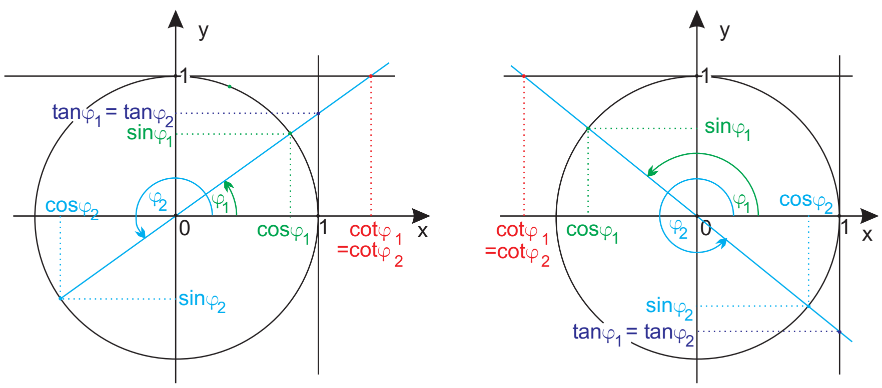
Diese Funktionen sind also für manche Größen φ nicht erklärt, wie auch an ihren Graphen ersichtlich wird.



Für φ zwischen 0° und 90° kann man sich Tangens und Kotangens wieder am rechtwinkligen Dreieck mit einer Innenwinkelgröße φ veranschaulichen. In der Notation der obigen Merkregel für Sinus und Kosinus erhalten wir

$$\tan\varphi = \frac{\text{“Gegenkathete”}}{\text{“Ankathete”}} \qquad \text{und} \qquad \cot\varphi = \frac{\text{“Ankathete”}}{\text{“Gegenkathete”}}.$$

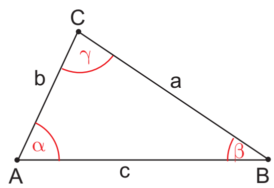
Auch $\tan\varphi$ und $\cot\varphi$ sind im rechtwinkligen Koordinatensystem interpretierbar. Dazu nutzen wir wieder das Bild des Punktes $(1, 0)$ bei einer Drehung durch den Winkel φ um den Koordinatenursprung. Wir schneiden die Gerade, die durch diesen Bildpunkt und den Ursprung verläuft, sowohl mit der Geraden $x = 1$ als auch mit der Geraden $y = 1$. (Beides sind **Tangenten** am Einheitskreis um den Koordinatenursprung.) Der erste Schnittpunkt hat die Koordinaten $(1, \tan\varphi)$, der zweite $(\cot\varphi, 1)$. In beiden Bildern ist $\varphi_2 = \varphi_1 + 180°$ gewählt.



Für manche Winkel kann man die zugehörigen Werte der Winkelfunktionen einfach berechnen. Die Ergebnisse sind in der nebenstehenden Tabelle dargestellt.

	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\varphi$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot\varphi$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

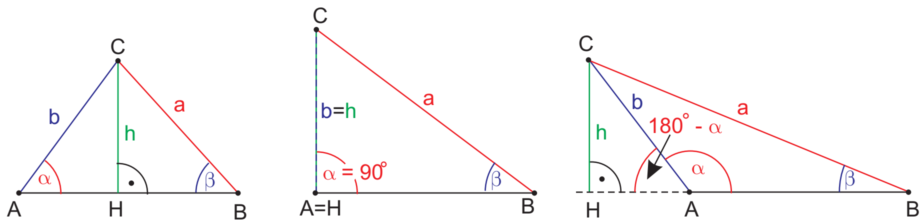
Wichtige Anwendungen der trigonometrischen Funktionen betreffen Zusammenhänge zwischen Seitenlängen und Winkelgrößen im Dreieck ("Tri-gono-metrie" = "Drei-seit-messung"). In den folgenden beiden Sätzen nutzen wir ein Dreieck ABC mit den üblichen Bezeichnungen $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ und $\gamma = |\sphericalangle ACB|$.



Satz 73 (Sinussatz) *In jedem Dreieck verhalten sich die Seitenlängen so wie die Sinus der gegenüber liegenden Winkel:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Beweis: Der Fußpunkt des Lotes von C auf die Gerade $g(AB)$ sei H. Die Lotlänge sei h.



Dann folgt $h = b\sin\alpha$: Im Fall $\alpha < 90^\circ$ erhält man $\sin\alpha = \frac{h}{b}$ am rechtwinkligen Dreieck AHC. Wenn $\alpha = 90^\circ$ gilt, erhalten wir $H = A$ und $h = b = b\sin 90^\circ = b\sin\alpha$. Im Fall $\alpha > 90^\circ$ nutzen wir am rechtwinkligen Dreieck AHC die Gleichheit

$$\frac{h}{b} = \sin(180^\circ - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha.$$

Entsprechend folgt $h = a\sin\beta$ durch Betrachtung des Dreiecks BHC. Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für h ergibt $b\sin\alpha = a\sin\beta$ und somit $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

Die Gleichung $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ zeigt man analog. ■

Satz 74 (Kosinussatz) *Für jedes Dreieck ABC gilt mit den oben eingeführten Bezeichnungen*

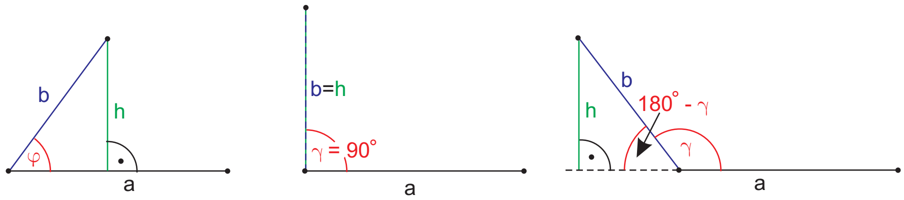
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \qquad \textit{und} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Man beachte, dass der Satz des Pythagoras aus dem Kosinussatz folgt, denn für einen rechten Winkel gilt $\cos 90^\circ = 0$.

Satz 75 (Flächenformeln für Parallelogramme und Dreiecke) ***a)*** *Hat ein Parallelogramm P einen Innenwinkel der Größe γ und sind die Längen seiner anliegenden Seiten a und b, so berechnet sich der Flächeninhalt von P gemäß $|P| = ab\sin\gamma$.*

b) *Hat ein Dreieck D einen Innenwinkel der Größe γ und sind die Längen seiner anliegenden Seiten a und b, so berechnet sich der Flächeninhalt von D gemäß $|D| = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.*

Beweis: Wir nutzen die Flächenformeln aus den Sätzen 39 und 40 und betrachten in beiden Fällen die Seite der Länge a als Grundseite. Dann gilt $|P| = ah$ und $|D| = \frac{1}{2}ah$, wobei h jeweils die Höhe über der Grundseite ist. Diese Höhe ist aber die Länge des Lotes vom zweiten Endpunkt der Seite der Länge b auf die Seite der Länge a (oder auf die Verlängerung dieser Seite).



Wie im Beweis des Sinussatzes erhalten wir $h = b\sin\gamma$. Daraus und aus den obigen Formeln für $|P|$ und $|D|$ folgen die beiden Behauptungen. ■

20 Volumen und Oberfläche von Körpern

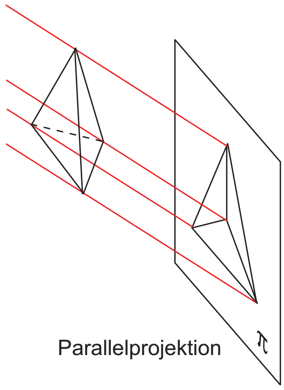
In der Schulgeometrie wird neben der ebenen Geometrie auch räumliche Geometrie behandelt. Man beschränkt sich auf die Betrachtung von einfachen ebenflächig begrenzten Körpern (Polyeder): Würfel, Quader, Prisma, Pyramide, sowie auf die Betrachtung von anderen Körpern: Zylinder, Kegel und Kugel. Dabei werden Berechnungen durchgeführt, die auf die Kenntnisse der ebenen Geometrie zurückgreifen. Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht oft die Bestimmung des Volumens $|K|$ eines Körpers K. In Analogie zur Längen-, Winkel- und Flächenmessung (vgl. Kapitel 3 und 11) ordnet man jedem Körper ein Volumen zu. Das **Volumen** $|K|$ eines Körpers K ist wieder das Produkt einer **Volumenmaßzahl** $v(K)$ und einer **Volumeneinheit**.

Die Volumeneinheit leitet man auch hier meist aus einer vorgegebenen Längeneinheit ab, indem man als Eichfigur einen Würfel W wählt, dessen Seitenlängen eine Längeneinheit betragen. Ist unsere Längeneinheit etwa einen Zentimeter, so sind die Seiten von W einen Zentimeter lang und das Volumen wird $|W| = 1\text{cm}^3$, ein Kubikzentimeter, genannt. Entsprechend erhält man auch Kubikmillimeter (1mm^3), Kubikmeter (1m^3), Kubikkilometer (1km^3) u.s.w. Wir können die jeweils abgeleitete Volumeneinheit dann auch als formales Produkt der Längeneinheit mit sich selbst betrachten: $1\text{mm}^3 = (1\text{mm}) \cdot (1\text{mm}) \cdot (1\text{mm})$, $1\text{cm}^3 = (1\text{cm}) \cdot (1\text{cm}) \cdot (1\text{cm})$, $1\text{m}^3 = (1\text{m}) \cdot (1\text{m}) \cdot (1\text{m})$, $1\text{km}^3 = (1\text{km}) \cdot (1\text{km}) \cdot (1\text{km})$. In abstrakteren Zusammenhängen ist es sinnvoll, sich auf keine konkreten Volumeneinheiten festzulegen. Wir nutzen dann die Abkürzung VE für die abgeleitete Volumeneinheit und erhalten den formalen Zusammenhang durch die Gleichung $(1\text{LE})\cdot(1\text{LE})\cdot(1\text{LE}) = 1\text{LE}^3 = 1\text{VE}$. In Formeln zur Berechnung des Volumens eines Körpers K verwenden wir hier das Formelzeichen V, also $V = |K|$.

Ebenfalls in Analogie zur Strecken-, Winkel- und Flächenmessung muss die Volumenmaßzahl die folgenden drei Eigenschaften erfüllen:

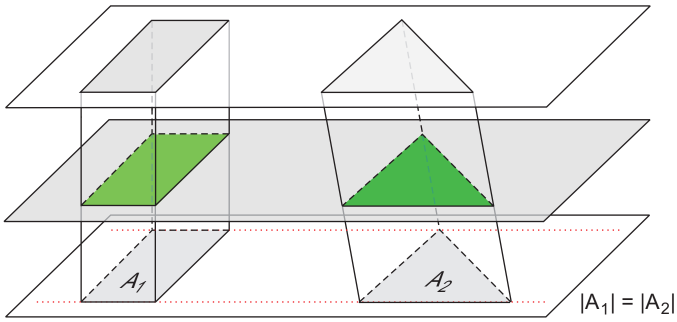
- Wird ein Körper K in zwei Teilkörper K_1 und K_2 zerlegt, so gilt $v(K) = v(K_1) + v(K_2)$ (Additivität).
- Sind K und K' kongruente Körper, so gilt $v(K) = v(K')$ (Bewegungstreue).
- Es gilt $v(W) = 1$ (Eichung oder Normiertheit).

Zur Darstellung der Körper werden diese in der Regel mit einer Parallelprojektion aus dem dreidimensionalen Raum in die zweidimensionale Zeichenebene abgebildet. Dazu verwendet man oft die **Kavalierprojektion**, bei der Strecken, die parallel zur Projektionsebene verlaufen (Breite und Höhe) in Originallänge abgebildet werden, wogegen Strecken, die senkrecht zu der Projektionsebene liegen (Tiefe), um die Hälfte verkürzt werden.

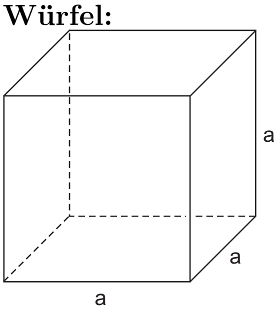


Neben dem Volumen eines Körpers ist auch dessen Oberflächeninhalt interessant. Diesen bezeichnen wir kurz mit A_O. Bei manchen Körpern (Pyramide, Kegel) betrachtet man auch die Mantelfläche, die wir kurz mit A_M bezeichnen. Auch Grund- und Deckflächen (A_G, A_D) spielen gelegentlich eine Rolle.

Ein wichtiges Prinzip, dass bei der Bestimmung des Volumens von schiefen Prismen, Pyramiden, Zylindern und Kegeln angewendet werden kann, ist das **Cavalierische Prinzip**. Es geht auf den italienischen Mathematiker Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 - 1647) zurück und besagt: Zwei Körper, deren Querschnitte parallel zur Grundfläche in jeder Höhe flächengleich sind, haben gleiches Volumen. Veranschaulicht wird dieses Prinzip oft durch Münzen, die zu einem geraden Zylinder aufgeschichtet und anschließend zu einem schiefen Zylinder verschoben werden. Dabei ändert sich das Volumen des Körpers nicht.

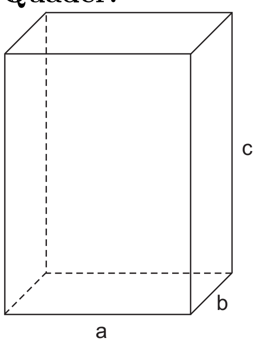


Würfel:



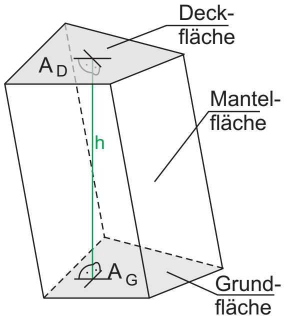
$V = a^3$
$A_O = 6 \cdot a^2$

Quader:

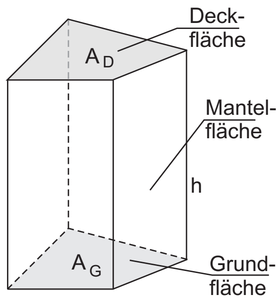


$V = a \cdot b \cdot c$
$A_O = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$

Prisma:

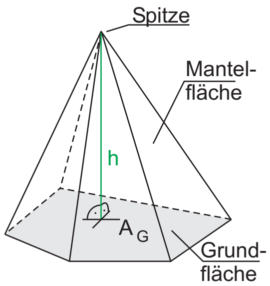


Im Prisma sind Grund- und Deckfläche n-Ecke, die kongruent und parallel zueinander sind. Die Seitenflächen sind Parallelogramme.
Im geraden Prisma sind die Seitenflächen Rechtecke.
$V = A_G \cdot h$
$A_O = 2A_G + A_M$

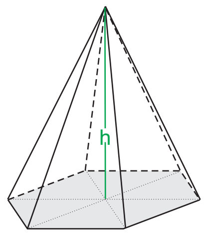


gerades Prisma

Pyramide:

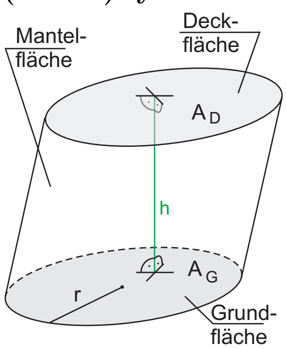


Die Grundfläche einer Pyramide ist ein n-Eck. Die Seitenflächen sind Dreiecke und diese bilden die Mantelfläche.
Bei einer geraden Pyramide ist die Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck und der Fußpunkt der Höhe ist Mittelpunkt dieser Grundfläche.
$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$
$A_O = A_G + A_M$

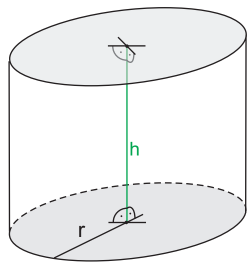


gerade
Pyramide

(Kreis-)Zylinder:

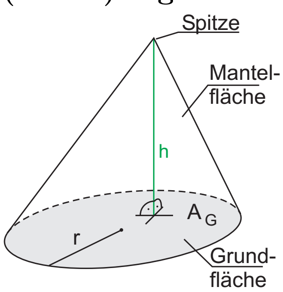


Beim (Kreis-)Zylinder sind Grund- und Deckfläche zueinander kongruente und parallele Kreise.
Beim geraden (Kreis-)Zylinder steht die Gerade (Achse) durch die Mittelpunkte von Grund- und Deckfläche senkrecht auf diesen.
$V = A_G \cdot h$
$A_O = 2A_G + A_M$

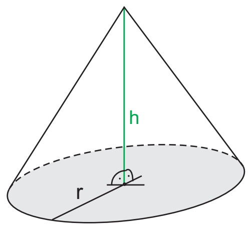


gerader
(Kreis-)Zylinder

(Kreis-)Kegel:

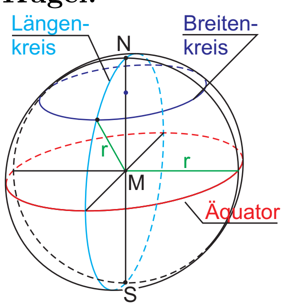


Die Grundfläche eines (Kreis-)Kegels ist ist ein Kreis.
Beim geraden (Kreis-)Kegel ist der Höhenfußpunkt der Mittelpunkt der Grundfläche. Die Abwicklung seiner Mantelfläche ist ein Kreisausschnitt.
$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$
$A_O = A_G + A_M$



gerader
(Kreis-)Kegel

Kugel:



$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$
$A_O = 4\pi \cdot r^2$

Literatur

[1] *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Beschlüsse der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003.

[2] Baptist, Peter: *Pythagoras und kein Ende?* Klett, 1997.

[3] Davis, Philip J.; Hersh, Reuben: *Erfahrung Mathematik.* Birkhäuser Verlag, 2. Auflage, 1994.

[4] Euklid: *Die Elemente. Bücher I–XIII.* Hrsg. u. übers. v. Clemens Thaer. Frankfurt a. M. Harri Deutsch, 4. Aufl. 2003 (= Ostwalds Klass. d. exakten Wiss. 235)

[5] Fraedrich, Anna M.: *Die Satzgruppe des Pythagoras.* Spektrum Akademischer Verlag, 1994.

[6] Hajós, György: *Einführung in die Geometrie.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1970.

[7] Hilbert, David: *Grundlagen der Geometrie.* In: Hilbert, David; Wiechert, Emil: *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen.* Verlag B. G. Teubner, 1899.

[8] Houston, Kevin: *Wie man mathematisch denkt: Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger.* Spektrum Akademischer Verlag, 2012.

[9] Kaplan, Robert und Ellen: *Das Unendliche denken: Eine Verführung zur Mathematik.* Econ Verlag, 2003.

[10] Lietzmann, Walther: *Der Pythagoreische Lehrsatz.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1968 (9. Auflage).

[11] Livio, Mario: *Ist Gott ein Mathematiker? Warum das Buch der Natur in der Sprache der Mathematik geschrieben ist.* Verlag C. H. Beck, 2010.

[12] Reichardt, Hans: *Gauß und die nicht-euklidische Geometrie.* BSB B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, 1976.

[13] Scriba, Christoph J.; Schreiber, Peter: *5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen.* Springer, 3. Auflage, 2010.