FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
Fakultät für Mathematik und Informatik

seit 1558

JENAER SCHRIFTEN ZUR MATHEMATIK UND INFORMATIK

Eingang: 05. Dezember 2011 Math / Inf / 02 / 11
Als Manuskript gedruckt

Elementargeometrie in Arbeitsgemeinschaften

Dr. Gerhard Roesch

Carl-Zeiss-Gymnasium
Staatliches Gymnasium
mit mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Spezialklassen
Erich-Kuithan-Straße 7
07743 Jena

roepark33apd@yahoo.de

Elementargeometrie in Arbeitsgemeinschaften

Gerhard Roesch

Arbeitsgemeinschaften stellen eine Form der äußeren Differenzierung dar. Mit einer ausgewählten, interessierten Schülergruppe kann man Themen behandeln, die bei innerer Differenzierung im Unterricht nicht vermittelbar sind.

Dieser Ausarbeitung liegt ein Vortrag zu Grunde, den ich am 22. Januar 2010 im Didaktik-Kolloquium an der Friedrich-Schiller-Universität Jena gehalten habe. Ich komme damit dem Wunsch nach, meine Überlegungen zu mathematischen Arbeitsgemeinschaften einer breiten Öffentlichkeit zugänglich zu machen, denn häufig fragen uns Kolleginnen und Kollegen, die Arbeitsgemeinschaften Mathematik an ihren Gymnasien übernehmen wollen, welche Inhalte wir für geeignet halten.

Dieser Artikel soll mögliche Inhalte aus der Elementargeometrie - verbunden mit einigen Aufgabenbeispielen - vorstellen. Diese Aufgabenbeispiele sind z. T. in den ersten fünfzig Jahren der Mathematikolympiadegeschichte gestellt worden.

Im aktuellen Mathematikunterricht spielt die Geometrie eine deutlich geringere Rolle als noch vor zwanzig Jahren; daher besteht hier Nachholbedarf. In Arbeitsgemeinschaften können solche Defizite aufgeholt und die Schönheit dieses Gebietes sichtbar gemacht werden. Außerdem leistet die Beschäftigung mit Geometrie wertvolle Beiträge zum Denkvermögen und zur weiteren Entwicklung von räumlichen Vorstellung. Es gibt zahlreiche Möglichkeiten für Beweise in der Elementargeometrie, die in der Sekundarstufe I händelbar sind.

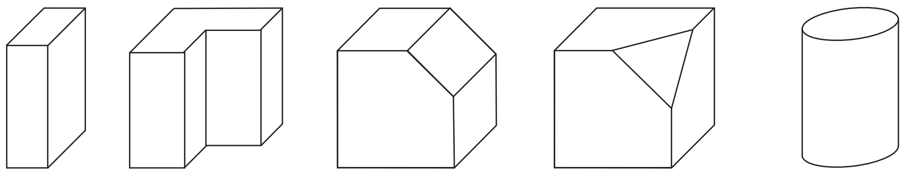
Zunächst ein paar Vorbemerkungen:
Dieser Artikel kann natürlich nur Anregungen geben; ein Anspruch auf Vollständigkeit ist nicht einmal in Ansätzen vorgesehen.
Potentielle Teilnehmer an einer solchen Arbeitsgemeinschaft nehmen oft an Schülerwettbewerben (etwa Mathematikolympiaden) teil. Daher wird ein Anliegen der Arbeitsgemeinschaftstätigkeit die Vorbereitung auf derartige Wettbewerbe darstellen.
Ferner ist zu beachten: Arbeitsgemeinschaften dürfen keinen Stoff oberer Klassen „vorholen". Das wäre kontraproduktiv. Stattdessen vertiefen wir den Schulstoff und ergänzen ihn um Gebiete, die im Thüringer Lehrplan nicht vorkommen.
Außerdem können wir in Arbeitsgemeinschaften ein höheres Maß an Exaktheit praktizieren, das im gewöhnlichen Unterricht eine Überforderung bedeuten würde. Hierzu gehören z. B. Analysis, Beweis und Determination bei Konstruktionsaufgaben.

Das umfangreiche Gebiet der Geometrie soll hier in vier Abschnitten dargelegt werden:

- Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens,
- geometrische Beweise und Berechnungen (in Ebene und Raum),
- konstruktive Geometrie und
- darstellende Geometrie.

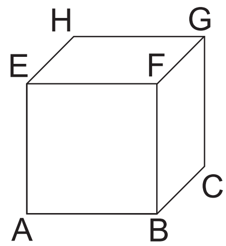
Zur Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens
Das räumliche Vorstellungsvermögen kann gar nicht zeitig genug entwickelt werden. Das bestätigen uns Entwicklungspsychologen. Bereits mit geringen geometrischen Grundkenntnissen lassen sich z.B. folgende Aufgaben lösen. (Die Aufgaben 1 bis 3 sind übrigens bereits Grundschülern gestellt und oft erfolgreich bewältigt worden.)

Aufgabe 1
Zeichne je ein Netz folgender Körper



Hier kann auch diskutiert werden, wie viele verschiedene (also nicht durch Kongruenzabbildungen ineinander überführbare) Netze es beispielsweise für einen Würfel gibt.

Aufgabe 2
Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$. An der Ecke A sitze eine Ameise, die sich auf der Oberfläche dieses Würfels frei bewegen kann. Die Ameise möchte auf kürzestem Wege

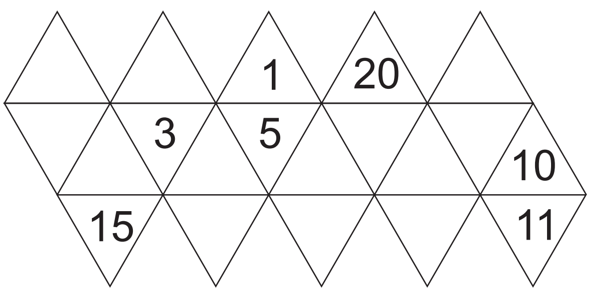


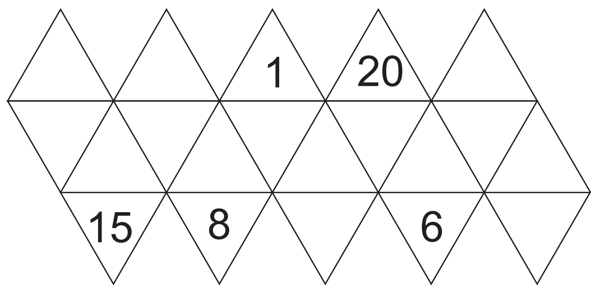
(a) zum Punkt G,
(b) erst zum Mittelpunkt der Fläche $BCGF$, dann zum Mittelpunkt der Fläche $EFGH$ und dann wieder zurück zum Punkt A gelangen.
(c) Die Ameise möchte auf einem Weg, der kürzer als der Umfang einer Seitenfläche ist, von A aus erst jede der sechs Seitenflächen betreten (d. h. mindestens mal kurz mit einem ihrer sechs Beine draufstehen) und dann im Punkt E ankommen.

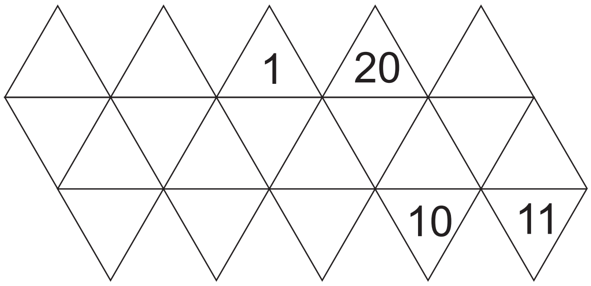
Gib für jede der drei Teilaufgaben (a), (b) und (c) je einen Weg in einem geeigneten Würfelnetz an!

Aufgabe 3
Die Seitenflächen eines regulären Ikosaëders sollen mit den Zahlen von 1 bis 20 versehen werden. Dabei sollen zwei Seitenflächen mit aufeinanderfolgendenen Zahlen eine gemeinsame Kante besitzen.

Ergänze die Zahlen auf diesen drei Netzen

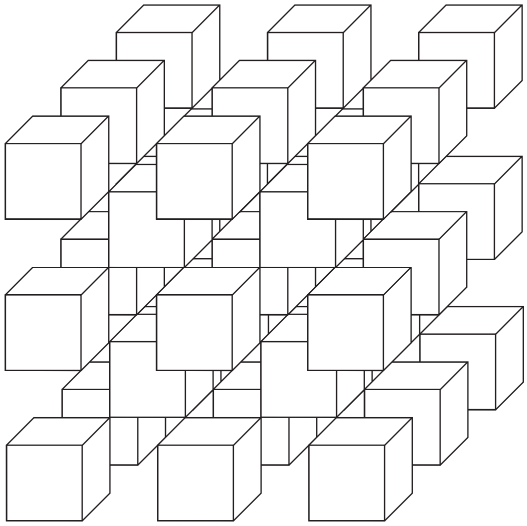






Aufgabe 4

Mehrere Einheitswürfel (also Würfel mit der Kantenlänge 1) sollen zu einem großen Gebilde zusammengesetzt werden. Dabei wird überall dort ein Würfel ergänzt, wo sich das Bild eines bestimmten Würfels bei einer Verschiebung entlang einer Raumdiagonalen befindet.



Baustufe 0 besteht aus genau einem Würfel; Baustufe 1 aus genau neun Würfeln; Baustufe 2 (s. Abbildung) aus genau 35 Würfeln. Sie ließe sich in einen Würfel der Kantenlänge 5 einpacken, hat in ihrer untersten Schicht 9 und in ihrer zweituntersten Schicht 4 Einheitswürfel.

Entscheide für die Baustufe n ($n \in \mathbb{N}, n > 0$)

(a) welche minimale Kantenlänge ein Würfel hat, in das das Gebilde eingepackt werden kann,
(b) wie viele Einheitswürfel sich auf einer Raumdiagonalen dieses größeren Würfels befinden,
(c) wie viele Einheitswürfel in der untersten und
(d) wie viele in der zweituntersten Schicht liegen sowie
(e) aus wie vielen Einheitswürfeln das gesamte Gebilde besteht!

Lösungsweg und Probe werden nicht verlangt.

Aufgabe 5

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Auf den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ befinden sich die Punkte P bzw. Q mit $\overline{AP} = 2 \cdot \overline{BP}$ und $\overline{CQ} = 2 \cdot \overline{DQ}$. Das Quadrat $ABCD$ rotiere um folgende Achsen:

(a) um die Gerade AD,
(b) um die Gerade AC,
(c) um die Parallele zu AC durch B,
(d) um die Gerade DP und
(e) um die Gerade PQ.

Den Teil des Raumes, der dabei von der Quadratfläche jeweils durchlaufen wird, bezeichnen wir als Rotationskörper.

Skizziere diese fünf Rotationskörper in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 45^0, q = 0,5$) mit stehender Rotationsachse!

Im freihändige Skizzieren von Netzen und Schrägbildern sollten jüngere Schüler schon eine gewisse Fähigkeit erwerben.

Im Zusammenhang mit der Bewegungsgeometrie kann man in Klasse Sechs beispielsweise folgende Aufgabe stellen:

<u>Aufgabe 6</u>
Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{CD} = 5cm$ und $\overline{BC} = \overline{AD} = 2cm$.

(a) Finde alle Verschiebungen, bei denen (mindestens) eine Seite dieses Rechtecks auf eine andere Seite dieses Rechtecks abgebildet wird!
(b) Finde alle Spiegelungen, bei denen (mindestens) eine Seite dieses Rechtecks auf eine andere Seite dieses Rechtecks abgebildet wird!
(c) Finde alle Drehungen, bei denen (mindestens) eine Seite dieses Rechtecks auf eine andere Seite dieses Rechtecks abgebildet wird!

Lösungsweg und Probe werden nicht verlangt.

Analoge Probleme lassen sich auch im Raum formulieren. Bewegungen der Platonischen Körper, bei denen (mindestens) eine Kante auf eine andere Kante (mit modifizierter Bedingung für die Drehung!) abgebildet wird, wurden schon in Kreisförderzirkeln diskutiert.

Zur Planimetrie/Stereometrie
Grundlage jeglicher intensiver Beschäftigung mit Geometrie ist eine fundierte Satzkenntnis aus Planimetrie und Stereometrie. Um das räumliche Vorstellungsvermögen permanent zu schulen, sollte man planimetrische Fragestellungen weitgehend in stereometrische einbetten.

Wesentlich erscheinen uns folgende Sätze aus der Planimetrie, die man von den Schülerinnen und Schülern möglichst selbst finden lassen sollte:

elementare Sätze zu Winkeln:

- Scheitelwinkel, Nebenwinkel, Winkel an geschnittenen Parallelen,
- Innenwinkelsummensatz,
- Außenwinkelsatz;

Sätze am Kreis:

- Peripheriewinkelsatz, Zentri-Peripheriewinkelsatz, Sehnentangentenwinkelsatz,
- Satz des Thales,
- Sehnensatz, Sekanten-Tangenten-Satz;

Sätze am Dreieck:

- Kongruenzsätze, Dreiecksungleichung,
- der größeren zweier Seiten liegt der größere Winkel gegenüber,
- dem größeren zweier Winkel liegt die größere Seite gegenüber,
- Sätze über besondere Linien im Dreick (Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Höhen, Außenwinkelhalbierende),
- evtl. EULERsche Gerade/FEUERBACHscher Kreis,
- Winkelhalbierende schneidet Mittelsenkrechte der Gegenseite auf dem Umkreis,
- Winkel zwischen Durchmesser des Umkreises durch einen Eckpunkt und zugehöriger Höhe ist gleich der Differenz der anderen beiden Innenwinkel,
- Abstände der Eckpunkte eines Dreiecks von den Berührungspunkten von In- und Ankreis,
- Satzgruppe des PYTHAGORAS,
- Flächeninhaltsformeln wie z. B. HERON oder $A = \rho \cdot s = \rho_c \cdot (s - c)$,
- evtl. $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$,
- Sätze von MENELAOS und CEVA;

*Sehnen- und Tangentenviereck*e:

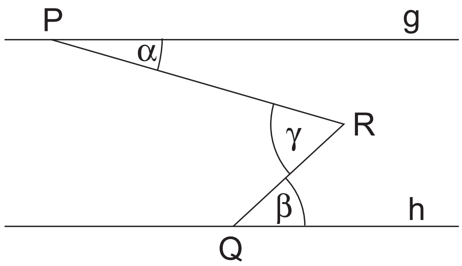
- Satz über Sehnenvierecke, Satz über Tangentenvierecke,
- Satz des PTOLEMÄUS,
- Eigenschaften der Verbindungsstrecken zwischen den Berührpunkten der Tangenten;

innere und äußere Teilung von Strecken, Goldener Schnitt, Kreis des APOLLONIUS.

Diese Übersicht kann nicht den geringsten Anspruch auf Vollständigkeit erheben, soll aber als Orientierung dienen. Auf dem Hintergrund dieses Satzkenntnisse können die Schülerinnen und Schüler dann folgende Aufgaben bewältigen:

Aufgabe 7

Gegeben seien zwei zueinander parallele Geraden g und h, ein Punkt $P \in g$, ein Punkt $Q \in h$ sowie ein Punkt R zwischen g und h. Zeige: $\alpha + \beta = \gamma$!



Aufgabe 8

Beweise folgenden Satz:

Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn sich die Diagonalen gegenseitig halbieren.

(Im Unterricht wird meist nur die Hinrichtung bewiesen, die Rückrichtung ist aber interessanter.)

Aufgabe 9
Beweise folgenden Satz:

Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn eine Winkelhalbierende gleichzeitig Seitenhalbierende ist.

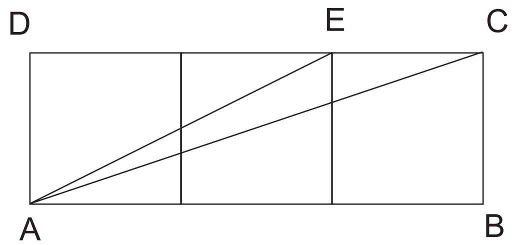
Aufgabe 10
Es sei ABC ein nicht-gleichschenkliges Dreieck. E sei der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ACB$ mit der Mittelsenkrechten von AB; W sei der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$.

Beweise: $\triangle AEW$ ist gleichschenklig.

Aufgabe 11
Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit den Diagonalen $\overline{AC} = e$ und $\overline{BD} = f$. ϕ sei der Schnittwinkel dieser beiden Diagonalen mit $0^0 < \phi \leq 90^0$ Ferner sei XYZ ein Dreieck mit $\overline{XY} = e$, $\overline{XZ} = f$ und $\sphericalangle ZXY = \phi$.

Beweise: Das Viereck $ABCD$ und das Dreieck XYZ sind flächengleich.

Aufgabe 12
Es werden drei zueinander kongruente Quadrate in angegebener Weise aneinandergefügt.



Beweise: Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle EAC$ schließt mit AB einen Winkel von $22,5^0$ ein.

Aufgabe 13
Ein reguläres Kuboktaëder ist ein konvexes Polyeder, das ausschließlich von sechs Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. Alle vierundzwanzig Kanten haben also dieselbe Länge.

Wie groß ist das Volumen eines regulären Kuboktaëders mit der Kantenlänge a?

Aufgabe 14
Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Höhen $4,29cm$, $6,6cm$ bzw. $7,8cm$ betragen?

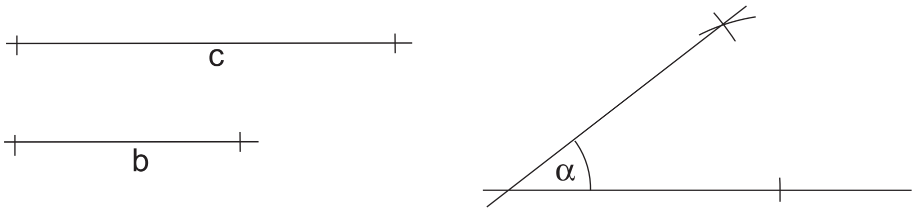
Aufgabe 15
Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{BC} = a = 18,2cm$. Die Höhenfußpunkte auf $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ heißen (in dieser Reihenfolge) X, Y und Z. Außerdem seien die Strecken $\overline{CY} = 7cm$ und $\overline{CZ} = 6,5cm$ bekannt.

Wie lang ist $\overline{XB}$?

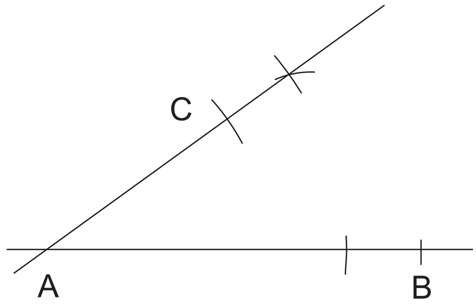
Zur Konstruktiven Geometrie

Konstruktionen im klassischen Sinne bestehen darin, aus gegebenen Stücken eine Punktmenge mit Hilfe eines Zirkels und/oder eines Lineals (dessen Skaleneinteilung nicht verwendet werden darf) zu gewinnen. Das sind also Konstruktionen im Sinne der Postulate 1 bis 3 des I. Buches der Elemente des EUKLID.

Soll beispielsweise ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = c = 5cm$, $\overline{AC} = b = 3cm$ und $\sphericalangle CAB = \alpha = 37^0$ konstruiert werden, so sind die gegebenen Stücke diese:



Die Konstruktion sieht dann folgendermaßen aus:



- Zeichnen der Seite $\overline{AB}$ mit der Länge c;
- Antragen des Winkels α an $\overline{AB}$ in A;
- Abtragen der Seite $\overline{AC}$ mit der Länge b an den freien Schenkel von α.

Das anschließende Nachzeichnen der drei Seiten mit einem weichen Bleistift ist nur eine Frage der Ästhetik, aber kein mathematisches Erfordernis.

Sobald eine Konstruktionsaufgabe dieses Schwierigkeitsniveau überschreitet, sind für ihre Lösung vier Teile erforderlich:

<u>Analysis</u>
Hier wird untersucht, `wie` die gesuchte Figur konstruiert werden soll. Dazu kann man bekannte geometrische Sätze heranziehen.

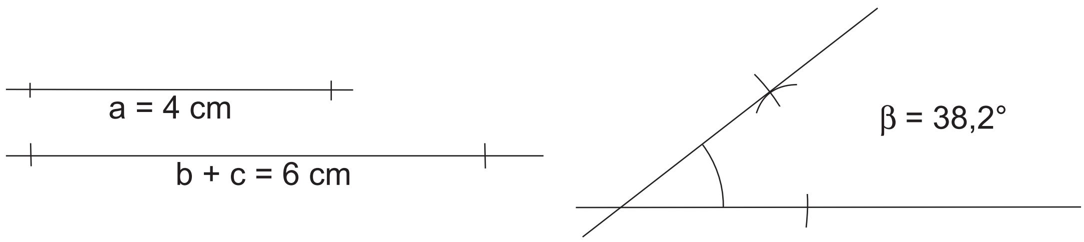
<u>Konstruktion mit Beschreibung</u>
Es genügt hier eine stichwortartige Darlegung der Teilschritte der Konstruktion, z. B.: ,,Antragen des Winkels γ in C an $\overline{AC}$'' oder Fällen des Lotes von R auf $\overline{PQ}$''.

<u>Beweis</u>
Hier wird gezeigt: Die so konstruierte Figur erfüllt `tatsächlich` alle Eigenschaften der zu konstruierenden Figur.

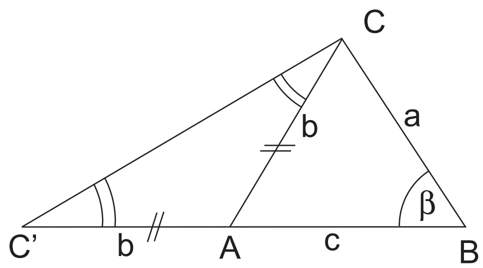
<u>Determination</u>
Hier geht man der Frage nach, ob eine Konstruktion ausführbar ist und wenn ja, ob sie bis auf Kongruenz eindeutig ist. Außerdem wird untersucht, welche Bedingungen die gegebenen Stücke erfüllen müssen.

Beispiel:
Ein Dreieck ABC ist aus den Stücken $\overline{BC} = a = 4cm$, $\overline{AC} + \overline{AB} = b + c = 6cm$ und $\sphericalangle ABC = \beta = 38,2^0$ zu konstruieren.

Gegeben



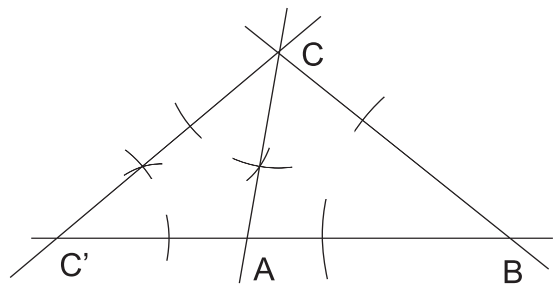
Es empfiehlt sich, zunächst eine Planfigur zu erstellen, anhand derer man die Analysis entwickelt.



Analysis

Trägt man $\overline{AC}$ auf die Verlängerung von $\overline{AB}$ über A hinaus von A aus ab, so erhält man einen Punkt C'. Das $\triangle C'BC$ ist nach dem Kongruenzsatz sws eindeutig konstruierbar. Wegen $\overline{CA} = \overline{C'A}$ gilt $\sphericalangle CC'A = \sphericalangle C'CA$ (Basiswinkelsatz), wodurch jetzt auch $\overline{CA}$ konstruiert werden kann.

Konstruktion mit Beschreibung



- Zeichnen der Seite $\overline{BC}$ mit der Länge a;
- Antragen des Winkels β in B an $\overline{BC}$;
- Abtragen der Strecke $b + c$ auf den freien Schenkel von β vom Punkt B aus;
- Bezeichnen des Endpunktes mit C';
- Antragen des $\sphericalangle BC'C$ in C an $\overline{CC'}$ in Richtung der Strecke $\overline{C'B}$;
- Bezeichnen des Schnittpunktes mit A.
- $\triangle ABC$ ist das gesuchte Dreieck.

Beweis

BC hat nach Konstruktion die Länge a; $\sphericalangle ABC$ ist nach Konstruktion gleich dem gegebenen Winkel β. Da $\sphericalangle BC'C$ in C an $\overline{CC'}$ angetragen wurde, gilt $\sphericalangle C'CA \cong \sphericalangle AC'C$ und somit (nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes) $\overline{AC} = \overline{AC'}$, woraus $\overline{AC} + \overline{AB} = \overline{C'B} = b + c$ folgt.

Determination

Das $\triangle C'BC$ ist nach dem Kongruenzssatz sws stets eindeutig konstruierbar. Die weiteren Konstruktionsschritte sind dann und nur dann eindeutig ausführbar, wenn $a < b + c$ (Dreiecksungleichung) gilt. Anderenfalls existiert das $\triangle ABC$ nicht, d. h. die Konstruktion ist nicht ausführbar.

Nachtrag (gehört nicht mehr zur Lösung)

Die Bedingungen $0 < a$; $0 < b+c$ und $0^0 < \beta < 180^0$ sind selbstverständlich und brauchen nicht erwähnt zu werden. Überlegen sollte man sich allerdings, ob der freie Schenkel des in C an $\overline{CC'}$ angetragenen $\sphericalangle BC'C$ die Gerade $C'B$ stets in einem Punkt zwischen C' und B schneidet. Dies ist aber wegen $a < b + c$ (Dreiecksungleichung) und somit (nach der Seiten-Winkel-Beziehung) $\sphericalangle BC'C < \sphericalangle C'CB$ der Fall. Diese Überlegung braucht in der Determination nicht zu stehen, weil sie die Lösungsvielfalt weder einschränkt noch erweitert; man sollte dies aber durchdenken.

Bevor man an die Lösung schwierigerer Konstruktionsaufgaben herangeht, überlege man sich zunächst, was der geometrische Ort aller Punkte der Ebene ist, die bestimmte Eigenschaften haben.

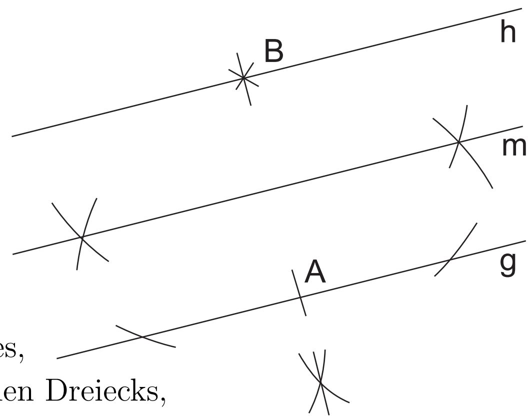
Beispiele:
Der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die ...

- ... von einem gegebenen Punkt M den Abstand r haben, ist der Kreis um M mit dem Radius r.
- ... von einer gegebenen Geraden g den Abstand a haben, sind die beiden Parallelen zu g im Abstand a.
- ... von zwei gegebenen Punkten A und B denselben Abstand haben, ist die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$.
- ... von zwei gegebenen sich schneidenden Geraden g und h denselben Abstand haben, sind die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle(g,h)$ und $\sphericalangle(h,g)$.
- ... von zwei gegebenen parallelen Geraden g und h denselben Abstand haben, ist die Mittelparallele von g und h.
- ... Scheitelpunkte eines rechten Winkels sind, dessen Schenkel durch zwei gegebene Punkte A und B verlaufen, ist der THALES-Kreis über $\overline{AB}$.

Außerdem vergegenwärtige man sich die vier geometrischen Grundkonstruktionen:

- Errichten der Mittelsenkrechten zu einer gegebenen Strecke,
- Halbieren eines gegebenen Winkels,
- Fällen des Lotes von einem Punkt auf eine gegebene Gerade und
- Errichten der Senkrechten zu einer Gerade in einem Punkt dieser Geraden.

Wie hiermit weitere geometrische Örter konstruktiv gefunden werden können, soll das Beispiel der Mittelparallelen verdeutlichen:



Gegeben seien zwei Geraden g und h mit $g \| h$. Man lege auf h einen Punkt B fest und fälle das Lot auf g. Der Fußpunkt heiße A. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ ist die gesuchte Mittelparallele von g und h.

Weitere „Standardkonstruktionen" sind:

- Finden des Mittelpunktes eines gegebenen Kreises,
- Konstruktion von Um- und Inkreis eines gegebenen Dreiecks,
- Tangenten von einem Punkt an einen gegebenen Kreis,
- gemeinsame (äußere und innere) Tangenten zweier Kreise,
- Seitenlänge eines zu einem gegebenen Rechteck flächengleichen Quadrats,
- Konstruktion gewisser regelmäßiger n-Ecke (damit verbunden: Goldener Schnitt) u. v. a. m.

Zwei Aufgaben sollen ein weiteres Vorgehen illustrieren:

<u>Aufgabe 16</u>
Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein Dreieck ABC, dessen Höhe auf $\overline{AC}$ $4,0cm$ und dessen Höhe auf $\overline{BC}$ $1,6cm$ lang sind. $\overline{AB}$ habe eine Länge von $5,0cm$.

Aufgabe 17

Gegeben seien ein Kreis k und eine Sehne $\overline{AB}$ von k die nicht Durchmesser von k ist. Finde konstruktiv alle Punkte P auf der Peripherie von k, für die $\overline{AP} = 3 \cdot \overline{BP}$ gilt!

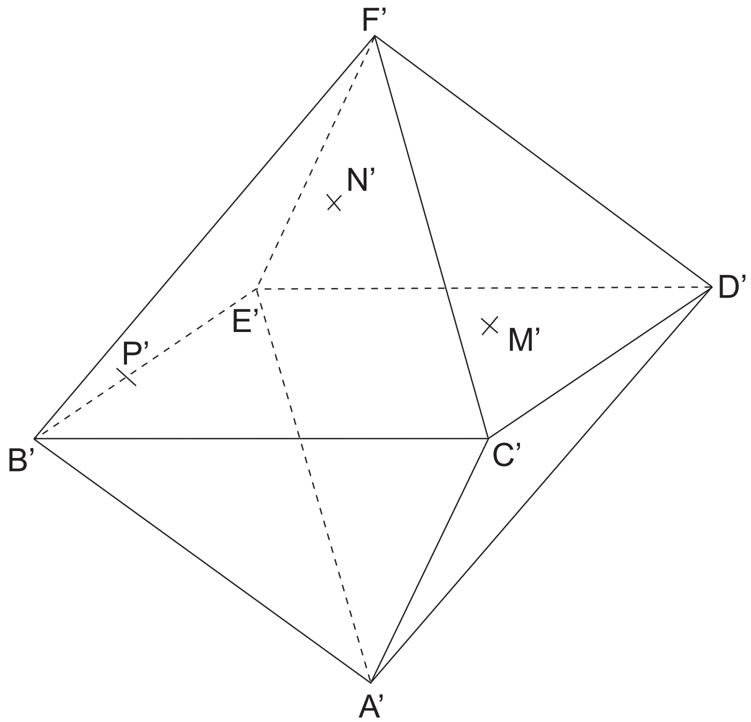
Zur Darstellenden Geometrie

Folgende Problemstellungen sollen zeigen, wie man die Beschäftigung mit Schrägbild und Zwei-Tafel-Projektion vertiefen kann:

Aufgabe 18

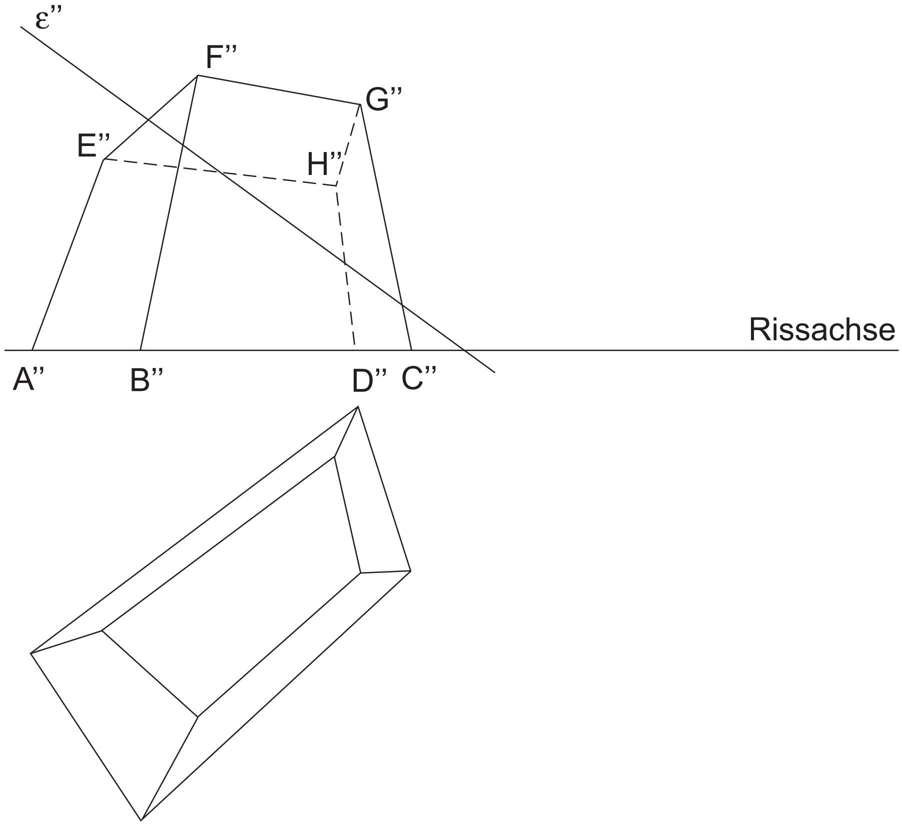
Gegeben sei dieses Oktaëder $ABCDEF$ im Schrägbild. P liege auf der Kante $\overline{BE}$, M auf der Seitenfläche CDF und N auf der Seitenfläche DEF. Das Oktaëder werde durch die Ebene PMN geschnitten.

Konstruiere die Schnittfigur und erläutere dein Vorgehen!



Aufgabe 19

Gegeben sei ein Pyramidenstumpf $ABCDEFGH$ in Grund- und Aufriss. (Punktbezeichnungen im Grundriss bitte selbst ergänzen.) Außerdem sei ϵ eine Ebene, die senkrecht auf der Aufrissebene steht und den Pyramidenstumpf schneidet. Zeichne die Schnittfigur in wahrer Größe und Gestalt!



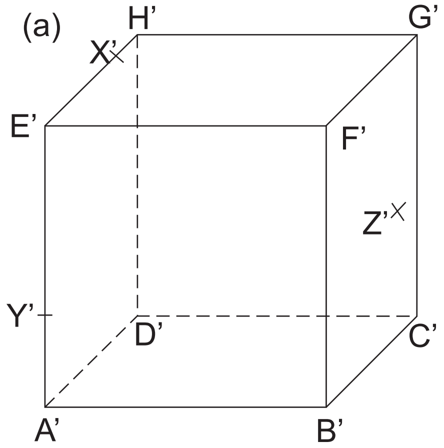
Aufgabe 20

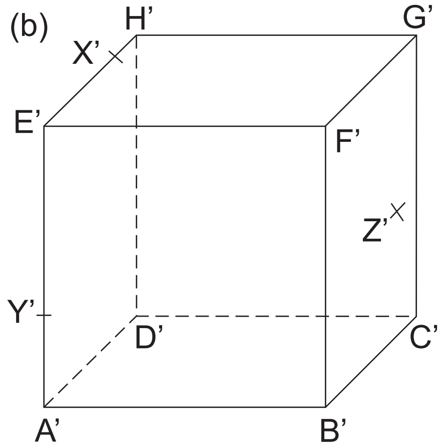
Gegeben seien ein Würfel $ABCDEFGH$ und drei Punkte X, Y und Z in einem Schrägbild. Der Punkt X liege auf der Kante $\overline{EH}$, der Punkt Y auf der Kante $\overline{AE}$. Der Punkt Z liege

(a) auf der hinteren Seitenläche $CDHG$ und

(b) auf der rechten Seitenfläche $BCGF$.

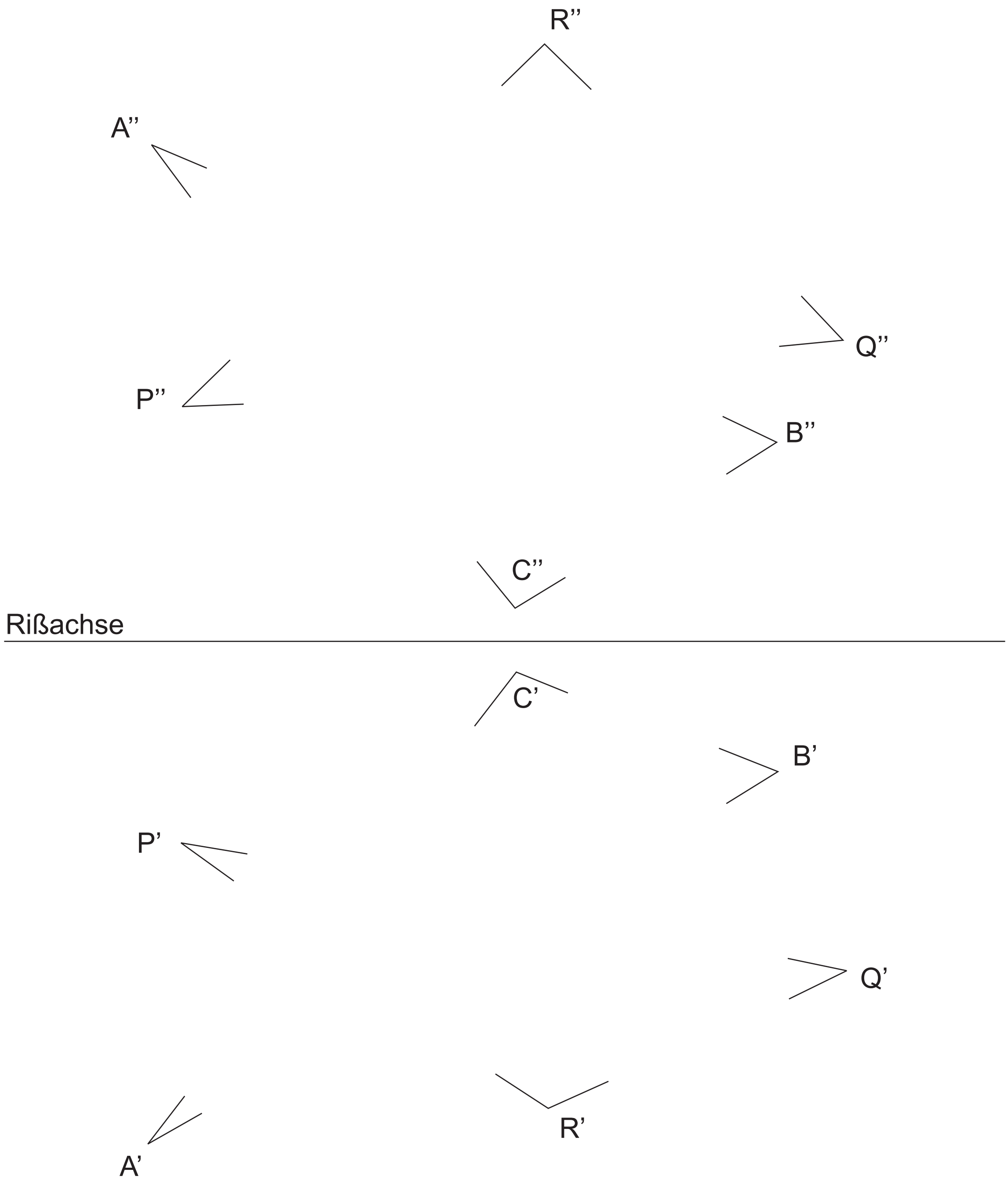
Konstruiere die Schnittfiguren in den Schrägbildern! (Welche Strecken sind zu stricheln?)





Aufgabe 21

Gegeben seien die Dreiecke ABC und PQR in Grund- und Aufriss. Ermittle zeichnerisch Grund- und Aufriss der Strecke $\overline{XY}$ in der sich beide Dreiecke schneiden, falls es eine solche gibt! (Welche Strecken sind zu stricheln?)



Wo findet man Material?
Eine gute Quelle für geeignete Aufgaben findet man in den Mathematikolympiaden. Einen Überblick und Bestellmöglichkeiten gibt es auf `www.mathematik-olympiaden.de` bzw. `www.matheolympiade-thueringen.de`. Aufgaben aus diesen Olympiaden wurden auch in der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* abgedruckt. Der Hereus-Verlag gibt auch Aufgaben aus dem *Hamburger Schülerzirkel Mathematik* heraus (`www.hereus-verlag.de`).

Auch beim Bundeswettbewerb Mathematik (`www.bundeswettbewerb-mathematik.de`) findet man interessante Aufgaben und weiterführende Links.

Auf der Seite der *Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (DMV) findet man eine Übersicht (`dmv.mathematik.de/schulthemen/schueler-wettbewerbe.html`) zu Schülerwettbewerben zur Mathematik.

Anregungen und Materialien zu mathematischen Arbeitsgemeinschaften bekommt man auch beim *Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler* unter `www.bezirkskomitee.de`.

Auch die Bände der *Mathematischen Schülerbücherei* sind sehr zu empfehlen.

Weiterhin sei hier eine kleine Auswahl von Bücher genannt:

- Alfred Hilbert (Hrsg.): *Mathematische Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 5 bis 8*. Volk und Wissen, Berlin, 1982.
- Werner Walsch (Hrsg.): *Mathematische Aufgaben für die Klassen 6 bis 10*. Volk und Wissen, Berlin, 1982.
- W. Engel; Udo.Pirl (Hrsg.): *Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR (Band 1)*. Volk und Wissen, Berlin, 1972.
- W. Engel; Udo.Pirl (Hrsg.): *Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR (Band 2)*. Volk und Wissen, Berlin, 1975.
- Bernd Noack; Herbert Titze (Hrsg.): *Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR in den Klassen 5 bis 8*. Volk und Wissen, Berlin, 1983.
- Udo Pirl (Hrsg.): *Aufgaben von Mathematikolympiaden in der UdSSR und in der ČSSR*. Volk und Wissen, Berlin, 1965.

Für die kritische Sichtung des Manuskripts, die computermäßige Umsetzung der Skizzen und die Ergänzung der Literaturhinweise möchte ich mich bei Herrn PD Dr. Michael Schmitz von der Friedrich- Schiller-Universität Jena recht herzlich bedanken.