

**FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT JENA**



seit 1558

JENAER SCHRIFTEN
ZUR
MATHEMATIK UND INFORMATIK

Eingang: 16.01.2019 Math/Inf/01/2019 Als Manuskript gedruckt

Papierfalten im Mathematikunterricht
– Anregungen und Beispiele –

PD Dr. Michael Schmitz

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Abteilung für Didaktik
Ernst-Abbe-Platz 2
07743 Jena

Papierfalten im Mathematikunterricht – Anregungen und Beispiele –

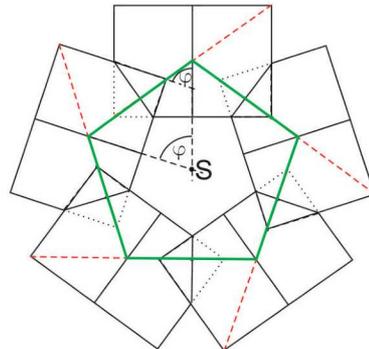
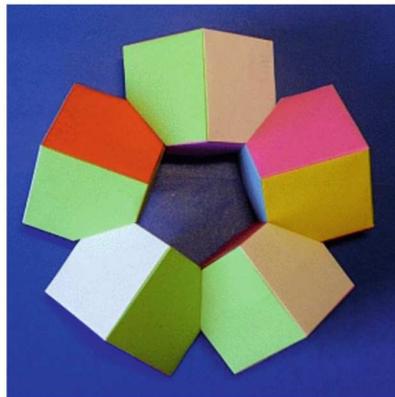
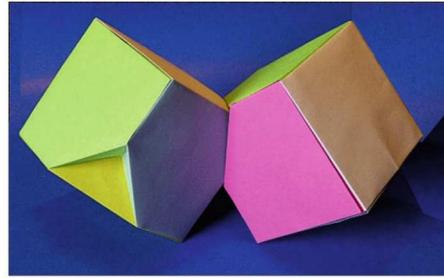
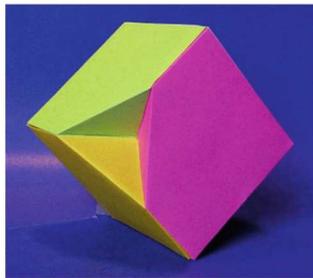
Michael Schmitz

(michael.schmitz@uni-jena.de)

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik

(Dezember 2018)

Ein Ring aus Kolumbuswürfeln.



Ist das Fünfeck regelmäßig?



Dieses Material ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz.

Lizenz ansehen unter <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Elementares	5
3 Unser Faltpapier	23
4 Das goldene Rechteck	35
5 Ein (fast) regelmäßiges Fünfeck	37
6 Vom Grashalm zum achteckigen Stern	39
7 Halbieren eines Quadrates	45
8 Der Thalesatz und der Satz von Pythagoras	73
9 Der Satz von Haga	77
10 Drittelung eines DIN-A4 Blattes	79
11 Kreise dritteln	85
12 Ergänzungen zum Satz von Haga	87
13 Vom Quadrat zum Würfel	99
14 Der Kolumbuswürfel	105
15 Der Schmetterlingsball	113
16 Hut, Becher oder Geschicklichkeitsspiel	117
17 Mit Papierfalten geht mehr	121
Literatur	131

1 Einleitung

Blättert man in Origamibüchern, etwa [20], [21], [23] oder ..., so kann man schnell die faszinierenden Möglichkeiten entdecken, die Origami auch für den Mathematikunterricht bietet. Man findet in diesen Büchern nicht nur schöne Produkte, sondern es kommen genauso Dreiecke, Quadrate, Rechtecke, regelmäßige Vielecke, Rhomben, reguläre Körper, ..., Kongruenz, Spiegelung, Strecken- und Flächenverhältnisse, ..., Pyramiden, Tetraeder, Würfel, Quader, ..., $\sqrt{2}$, der goldene Schnitt und vieles mehr vor. Hier kann man gut im Mathematikunterricht anknüpfen, um Inhalte des Unterrichts mit Produkten des Papierfaltens zu verknüpfen.

Selbstverständlich ist das Papierfalten auch eine sinnvolle Freizeitgestaltung, bei der man die Faltkunst entdecken kann.

Natürlich soll auch darauf hingewiesen werden, dass beim Falten von Papier neben den mathematischen Inhalten ebenfalls exaktes Arbeiten, die Feinmotorik, das Vorstellungsvermögen und das Selbstvertrauen weiterentwickelt werden (siehe auch [30]). Und es macht Spaß!

Diese Bedeutung des Papierfaltens für Bildung und Erziehung wurde in unserem Kulturkreis bereits von FRIEDRICH WILHELM AUGUST FRÖBEL (1782 - 1852) erkannt und genutzt. So waren u. a. Falten, Schneiden und Kleben von Papier fester Bestandteil in seiner *Kindernerziehung*.

Die Verbindung der alten japanischen Papierfaltkunst mit Mathematik wird *Origamics* genannt. In [13] wird auf eine Vielzahl von Anwendungsmöglichkeiten im Mathematikunterricht hingewiesen. Hier benutzen wir den Begriff *Mathegami*, um die Verbindung von Mathematik zu Origami herzustellen und die Mathematik dabei etwas in den Vordergrund zu heben.

Vielleicht sollten wir auch besser den Begriff *Mathefaltik* prägen, um an Stelle des Origami eher das Papierfalten in den Vordergrund zu stellen. Beim Papierfalten haben wir mehr Möglichkeiten als bei den strengen Regeln des Origami. So können wir beim Papierfalten auch schneiden und kleben, was schon von Fröbel angewendet wurde, beim traditionellen Origami aber nicht erlaubt ist.

Für den Mathematikunterricht oder für Arbeitsgemeinschaften bietet das Falten von Papier von der Grundschule bis zum Abitur eine Vielzahl interessanter Einsatzmöglichkeiten. Dazu sind einige Beispiele in diesem Heft zusammengestellt. Diese Beispiele habe ich im *Seminar zum Papierfalten im Mathematikunterricht*, das ich seit einigen Jahren an der Friedrich-Schiller-Universität Jena für Studenten¹ des Lehramts Mathematik (Regelschule und Gymnasium) angeboten habe, behandelt. Einige dieser Themen haben auch Einzug in Zeitschriften für den Mathematikunterricht gefunden ([29],[31],[32],[33]).

Im Rahmen der Kolloquien zur Didaktik haben wir als Abteilung Didaktik drei Kolloquien zum

¹Selbstverständlich dürfen sich auch Studentinnen, Lehrerinnen, Schülerinnen, ... angesprochen fühlen, wenn von Studenten, Lehrern, Schülern, ... die Rede ist.

Papierfalten im Mathematikunterricht erfolgreich durchgeführt und dieses Thema interessierten Lehrern näher gebracht. Informationen dazu finden Sie auf www.mathegami.de bzw. auf der Internetseite der Abteilung Didaktik der Fakultät für Mathematik und Informatik.

In den ausgewählten Beispielen werden unterschiedliche Papierfaltaufgaben, wie z. B. das Dritteln eines DIN-A4 Blattes, vorgestellt und die Richtigkeit der Faltkonstruktion überprüft. Dabei kommen unterschiedliche mathematische Hilfsmittel zum Einsatz.

Hier werden keine isolierten Aufgaben vorgestellt, die man an passender Stelle im Mathematikunterricht einsetzen kann. Das ist die Aufgabe des Lehrers, aus einem für ihn interessanten Thema zum Beispiel eine Problemaufgabe, eine Übungsaufgabe, ein Projekt oder eine Aufgabe zur mathematischen Modellierung einer realen Situation zu entwickeln, sodass eine Passfähigkeit zu seiner Unterrichtssituation entsteht. Dabei kommen auch Begründen und Beweisen nicht zu kurz. Hier erhalten wir Anknüpfungspunkte an die zu entwickelnden mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards und Lehrpläne.

Selbstverständlich ist das Papierfalten im Mathematikunterricht nicht *die* Methode, die den Mathematikunterricht an den Schulen attraktiv macht. Aber es ist eine gute Möglichkeiten, „handwerkliche“ Tätigkeiten mit Mathematik zu verknüpfen. Dabei spielt nicht nur die technische Anfertigung von Modellen eine Rolle. Wichtig ist die Mathematik, die unsere Schüler in den gefalteten Modellen entdecken können. Darüber hinaus finden diese Techniken eine Vielzahl von Anwendungen in der Industrie, zum Beispiel beim Stent in der Herzchirurgie, beim Airbag im Auto oder beim Sonnensegel in der Raumfahrt.

Zum Abschluss möchte ich meiner Frau sehr herzlich für das Korrekturlesen und Matthias Müller für das Lesen der Entwurfsfassung und das Einbringen inhaltliche Vorschläge danken. Bei Michael Fothe möchte ich mich dafür bedanken, dass er mich davon überzeugte, eine solche Zusammenfassung aufzuschreiben.

Erfurt, Dezember 2018

Michael Schmitz

2 Elementares

Zu Beginn wollen wir uns mit einigen grundlegenden Faltungen des Papiers befassen und Verbindungen zur euklidischen Geometrie herstellen. Dabei soll hier kein systematischer Aufbau und keine axiomatische Begründung des Papierfaltens geliefert werden. Eine solche axiomatische Begründung des Papierfaltens entstand zwischen 1989 und 2001 und wurde von JACQUES JUSTIN, HUMIAKI HUZITA und KOSHIRO HATORI entwickelt ([15]).

Die beim Falten von Papier entstehenden Faltlinien sind ein gutes Modell für Geraden der euklidischen Ebene (Bild 1a).

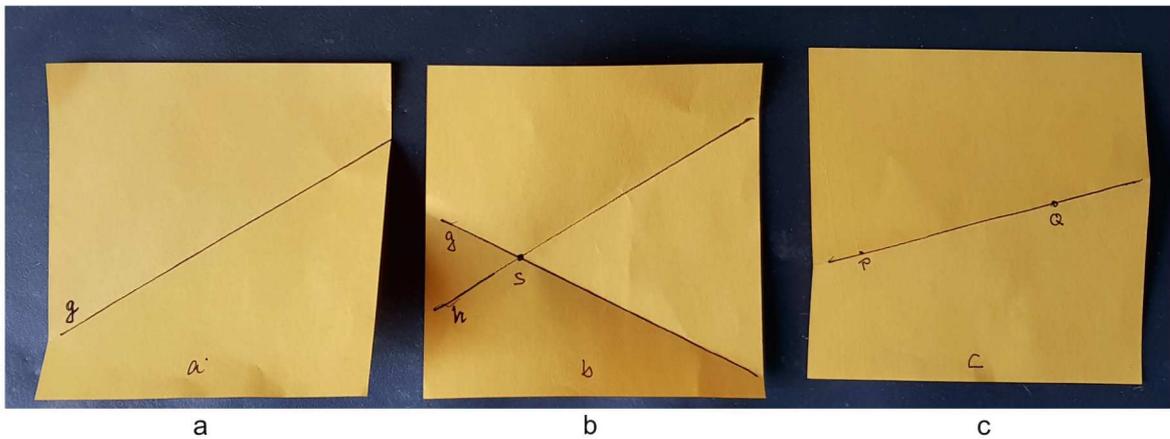


Bild 1: Faltgeraden

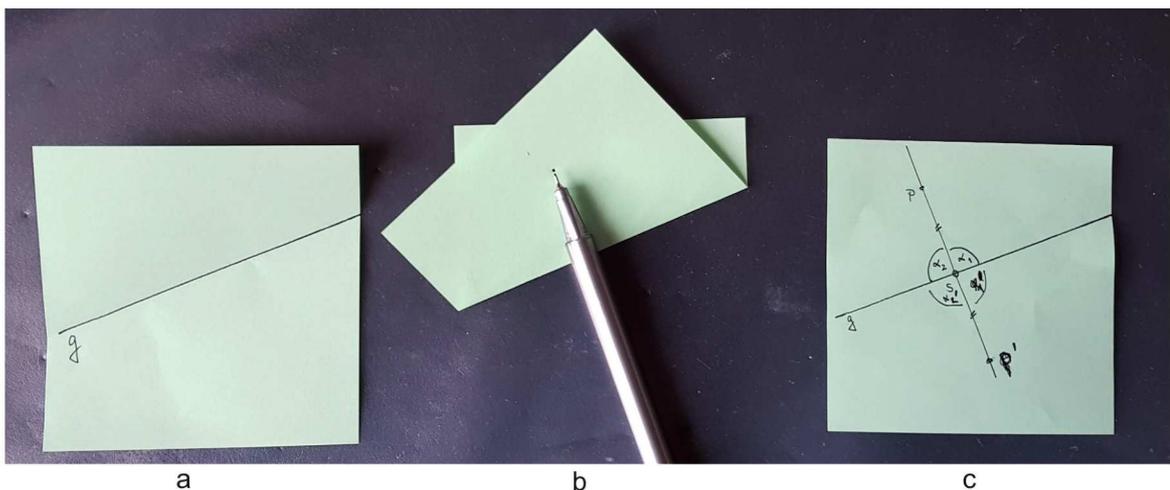


Bild 2: Geradenspiegelung

Der Schnittpunkt zweier Faltlinien lässt sich ermitteln (Bild 1b). Durch zwei gegebene Punkte auf dem Faltpapier können wir (mit etwas Geschick) eine Faltlinie falten (Bild 1c). Aus Bild 1a können

wir auch sofort entnehmen, dass das Falten von Papier eng mit der Spiegelung an der durch die
 Faltnie bestimmten Geraden verbunden ist. Falten wir nämlich das Papier an einer Faltnie g
 (Bild 2a), so entstehen teilweise zwei Schichten des Papiers, die direkt übereinander liegen. Stechen
 wir z.B. mit einer Zirkelspitze durch diese Doppellage hindurch, so markieren wir genau zwei Punkte
 (einen in jeder Papierlage), die direkt übereinander liegen (Bild 2b). Nach dem Auffalten bezeichnen
 wir diese markierten Punkte mit P und P' und verbinden diese mit Stift und Lineal, wie es im
 Bild 2c zu sehen ist. Die eingezeichnete Gerade durch P und P' schneidet g in S . An S entstehen
 vier Winkel: $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2$ und α'_2 . Weil $\sphericalangle P'SP$ ein gestreckter Winkel ist, sind α_1 und α'_1 sowie α_2 und
 α'_2 Nebenwinkel zueinander, die aufgrund der Faltung an g auch deckungsgleich zueinander sind.
 Folglich hat jeder dieser Winkel eine Größe von 90° . PP' ist damit senkrecht auf g . Weiterhin liegen
 die Strecken SP' und SP nach dem Falten an g direkt aufeinander, sie sind also deckungsgleich und
 folglich haben sie die gleiche Länge. Aufgrund dieser beiden Eigenschaften beim Falten ($PP' \perp g$
 und $|SP'| = |SP|$) ergibt sich, dass das Falten an einer Geraden der Spiegelung an dieser Geraden
 entspricht.

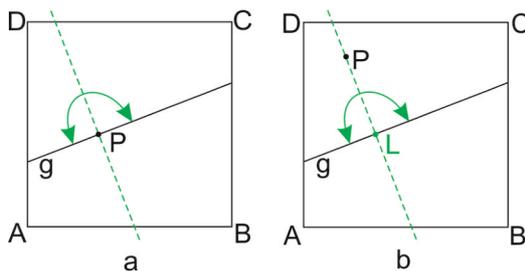


Bild 3: Senkrechte

Mit diesen Überlegungen sind wir aber nun in der Lage, rechte Winkel zu falten. Damit können wir

- in einem markierten Punkt P einer Faltnie g die zu g senkrechte Faltnie falten, wie es im Bild 3a zu sehen ist.

- von einem Punkt P außerhalb einer Faltnie g das Lot auf g fällen, wie es im Bild 3b zu sehen ist.

In beiden Fällen müssen wir nur g so auf sich selbst falten,

dass die Faltnie durch P geht.

Und wir können Mittelpunkte von Strecken bestimmen.

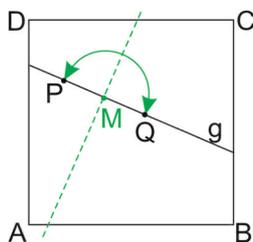


Bild 4: Steckenhalbierung

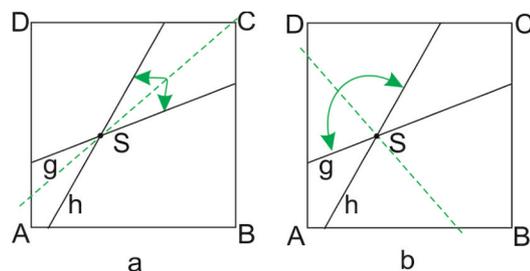


Bild 5: Winkelhalbierung

Sind auf einer Faltnie g zwei Punkte P und Q gegeben, so können wir den Mittelpunkt M
 der Strecke PQ durch Falten bestimmen, wie es im Bild 4 gezeigt ist. Dazu bringen wir den

Punkt P durch Umfalten auf den Punkt Q und streichen die dadurch bestimmte Faltlinie glatt. Diese Faltlinie schneidet g im gesuchten Mittelpunkt M von PQ . Gleichzeitig ist diese Faltgerade auch die Mittelsenkrechte der Strecke PQ .

Natürlich können wir durch Falten auch einen gegebenen Winkel halbieren. Sind auf einem Faltpapier zwei Faltgeraden g und h gegeben, die sich in einem Punkt S schneiden, so falten wir g auf h , sodass die Faltgerade durch S geht. Diese Faltgerade halbiert dann den entsprechenden Winkel. Für das Falten von g auf h gibt es genau zwei verschiedene Möglichkeiten (vgl. Bild 5a und b), so dass die Winkelhalbierenden von den beiden Winkeln, die durch g und h bestimmt sind, gefunden werden.

2.1 Technisches

Hier kommen drei praktische Falttipps, die beim Falten von Papier nützlich sein können.

TIPP 1: Zur Untersuchung unserer Faltungen ist es günstig, wenn wir die Faltlinien mit einem Stift nachziehen. Das können wir machen, indem wir nach dem Falten auf das Papier ein Lineal an die neue Faltlinie anlegen und diese mit einem Stift nachzeichnen. Oder, wir öffnen das Papier nach dem Falten nicht ganz und ziehen mit einem Stift direkt in der Falte die Faltlinie nach, so wie es im Bild 6a gezeigt ist.

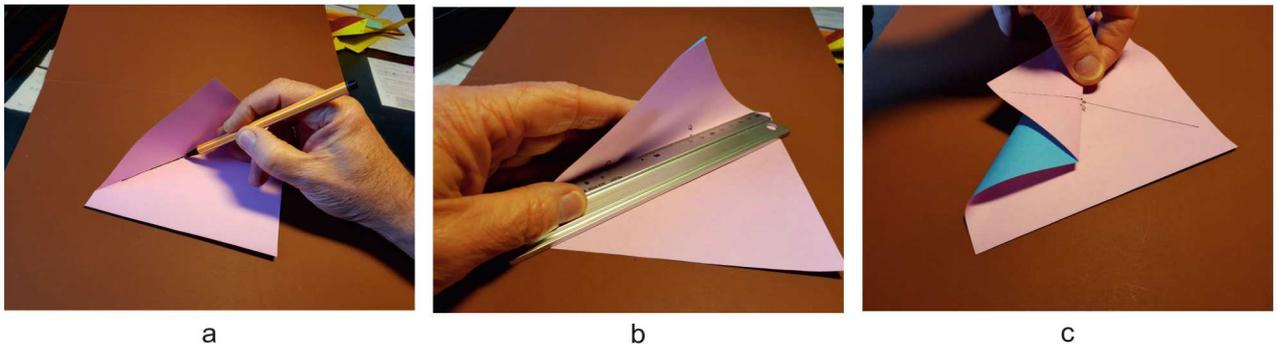


Bild 6: technische Tipps

TIPP 2: Manchmal ist es schwierig zwei Punkte durch eine Faltgerade zu verbinden. Eine solche Faltgerade können wir gut erzeugen, indem wir ein Lineal an die beiden, zu verbindenden Punkte anlegen und dann entlang des Lineals das Papier falten (Bild 6b). Natürlich entfernen wir das Lineal dann wieder und ziehen die Faltgerade gut nach.

TIPP 3: Wollen wir, wie im Bild 4, den Mittelpunkt oder die Mittelsenkrechte zu einer gegebenen Strecke falten, dann kann es sinnvoll sein, eine zusätzliche Faltlinie zu machen. Und zwar falten

wir das Faltpapier nach hinten um, sodass die Faltnie durch einen der beiden Punkte geht. Nun können wir diesen Punkt besser auf den anderen falten (Bild 6c).

2.2 Kleine Anwendungen

Die eben besprochenen Techniken zum Halbieren von Strecken und Winkeln, sowie zum Falten von rechten Winkeln sollen nun beim Falten einer Diagonale im Rechteck und beim Falten eines kleinen Schwanes zum Einsatz kommen.

2.2.1 Diagonale im Rechteck

Ist $ABCD$ ein rechteckiges Faltpapier, dann ist es manchmal nicht so einfach in das Rechteck eine Diagonale zu falten. Dies gilt im Besonderen für Rechtecke, bei denen eine Seite deutlich länger ist als die andere.

Zuerst überlegen wir. Wenn die Diagonale $d = AC$ in das Rechteck $ABCD$ gefaltet werden soll (Bild 7a), dann betrachten wir dazu die Mittelsenkrechte m , die d in M schneidet (Bild 7b).

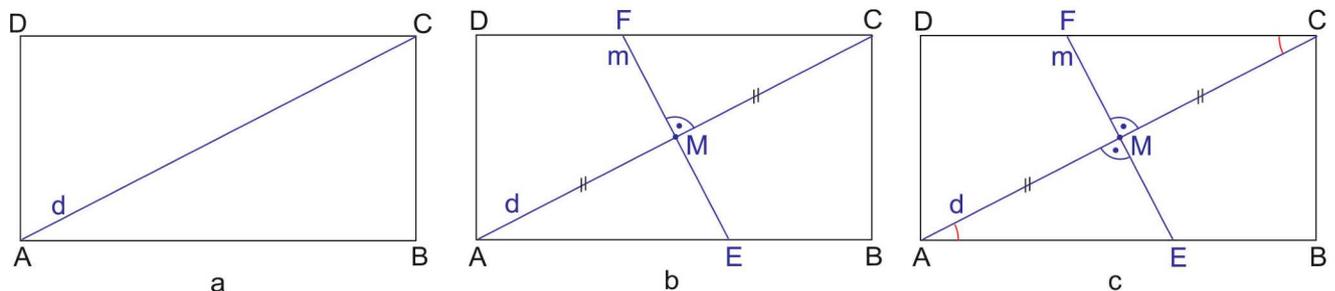


Bild 7: Diagonale im Rechteck

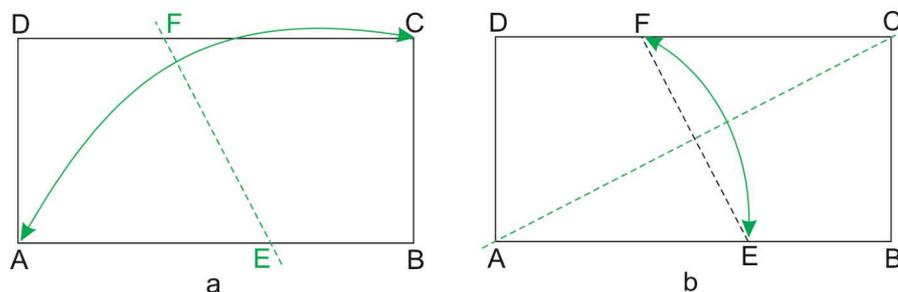


Bild 8: Diagonale im Rechteck

E und F sind die Schnittpunkte von m mit AB bzw. CD . Weil m die Mittelsenkrechte von AC ist, ist $|AM| = |MC|$ und M steht senkrecht auf d .

Weil AB und CD parallel zueinander sind, sind die beiden im Bild 7c markierten Winkel bei A bzw. C kongruent zueinander. Folglich sind auch die beiden Dreiecke AEM und CFM wegen (*ws*) kongruent zueinander und damit ergibt sich auch $|EM| = |MF|$. M ist also auch der Mittelpunkt von EF , womit AC auch die Mittelsenkrechte von EF ist.

Jetzt können wir falten, denn die *Faltgerade* EF lässt sich leicht bestimmen. Dazu müssen wir nur A auf C falten. Die *Faltgerade* bestimmt die Strecke EF (Bild 8a).

Nun müssen wir nur noch E auf F falten (Bild 8b). Die zugehörige *Faltgerade* ist die gewünschte *Diagonale* AC .

2.2.2 Ein kleiner Schwan

Aus einem quadratischen Faltpapier $ABCD$ wird jetzt ein kleiner Schwan (siehe Bild nebenan) entstehen, bei dem interessante Winkelbetrachtungen möglich sind.

Die *Faltfolge* ist dem Bild 10a-e zu entnehmen. Zuerst falten wir die *Diagonale* AC auf die übliche Weise in das Quadrat $ABCD$. Dann falten wir AB und AD so auf AC , dass die jeweilige *Faltlinie* durch A geht. Dabei entstehen die Punkte E und F . Nebenbei bemerken wir, dass $AECF$ ein *Drachenviereck* ist, was sich durch die *Faltlinien* bzw. entsprechende *Geradenspiegelungen* nachweisen lässt.

Als nächstes falten wir die *Faltlinie* EF . Wir wenden unser Faltpapier und falten E so auf AE , dass die *Faltlinie* durch B' geht, wobei die *Faltlinie* nur zwischen E und B' gefaltet wird. Analog verfahren wir mit dem Punkt F , den wir so auf AF falten, dass die *Faltlinie* ebenfalls durch B' geht. Auch hier falten wir die *Faltlinie* nur zwischen F und B' .



Bild 9: Kleiner Schwan

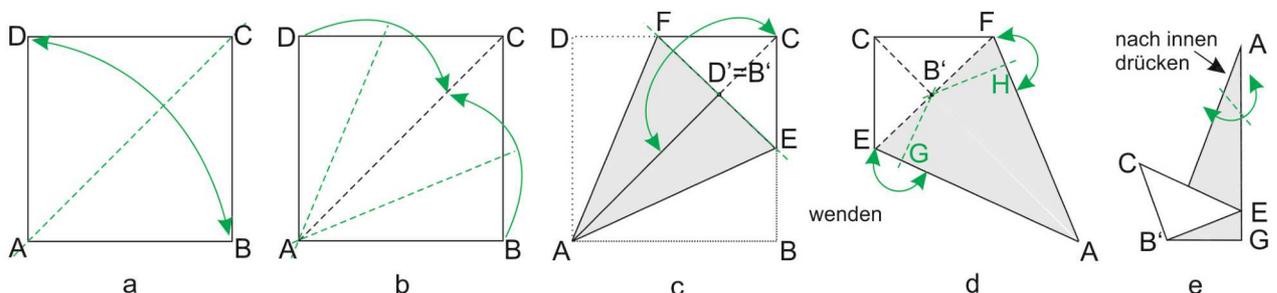


Bild 10: Faltanleitung Schwan

Jetzt wird es etwas schwieriger. So wie unser Faltpapier jetzt liegt (Bild 10d), ist AC eine *Bergfalte*.

Wir falten $B'C$ zur Tal falte um. Gleichzeitig falten wir entlang AB' , $B'H$ und $B'G$ sodass G auf H fällt. Damit ist der kleine Schwan fast fertig (Bild 10e). Für Kopf und Schnabel falten wir, wie es im Bild 10e zu sehen ist, in der Nähe von A . Entlang dieser Faltnie drücken wir die von A ausgehende Faltnie nach innen. Das Ergebnis sollte dann wie im Bild 9 aussehen.

An diesem kleinen Schwan können wir einige Winkelhalbierungen beobachten. So ist die Größe des Winkels in der Spitze des Schnabels gleich $\alpha = \frac{90^\circ}{4} = 22,5^\circ$ (Bild 11). Weiterhin finden wir auch einen Winkel mit der Größe $45^\circ = 2\alpha$ und einen mit der Größe $90^\circ = 4\alpha$.

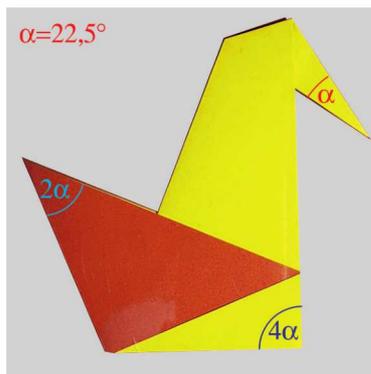


Bild 11: kleiner Schwan

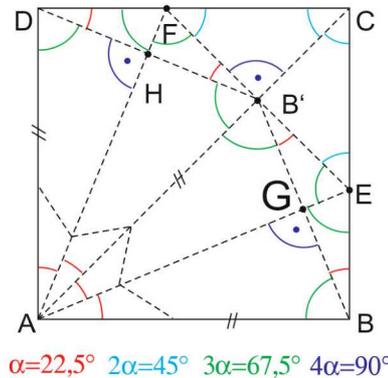


Bild 12: Faltmuster

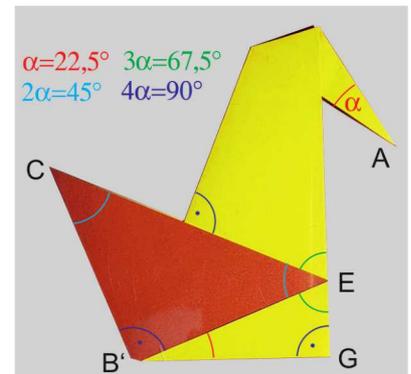


Bild 13: kleiner Schwan

Falten wir den kleinen Schwan wieder auseinander, können wir das Faltmuster betrachten (Bild 12). Dort können wir ausgehend von dem Winkel α in der Ecke A , am Schnabel des Schwans, die restlichen Winkel im Faltmuster bestimmen. Dabei treten nur Vielfache des Winkels α auf, wenn wir das Falten des Schnabels nicht berücksichtigen. Die entsprechenden Winkel sind auch im Bild 13 eingezeichnet.

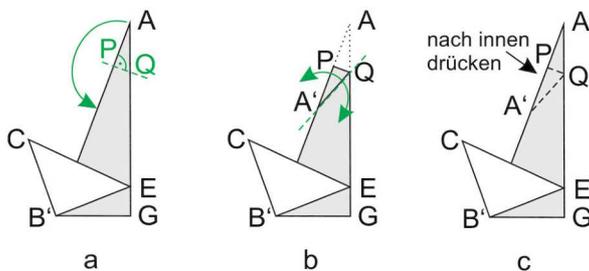


Bild 14: Faltanleitung Schwan, Schnabel

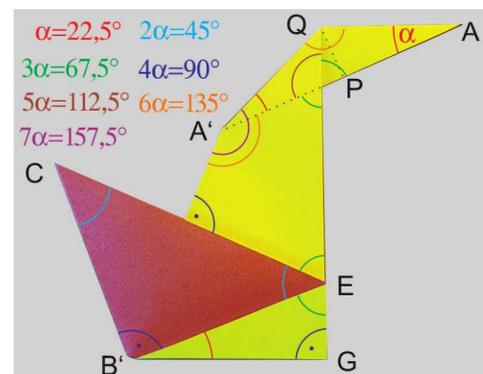


Bild 15: kleiner Schwan

Wollen wir auch beim Falten des Schnabels Winkel erzeugen, die ein Vielfaches von α sind, dann dürfen wir wie im Bild 10e den Schnabel nicht ganz beliebig falten. An Stelle dieser beliebigen

Faltung falten wir A auf $B'A$, dies aber beliebig (Bild 14a). Dabei entsteht die Faltlinie PQ , die senkrecht auf $B'A$ ist. Nun falten wir entlang $A'Q$ nach vorn und hinten (Bild 14b). Anschließend falten wir die Spitze A wieder nach oben und drücken $A'A$ nach innen entlang $A'Q$ (Bild 14c). Im Bild 15 sind alle Winkel eingezeichnet, alle Winkel sind Vielfache von α . Und wir bemerken auch, dass aufgrund der Winkelgrößen QA parallel zu $B'G$ ist.

2.2.3 60° falten

Eben haben wir durch Falten verschiedene Winkel erzeugt. Kann man aber auch einen Winkel mit der Größe 60° falten?

Ein Winkel mit der Größe 60° tritt beim gleichseitigen Dreieck ABC auf (Bild 16). Dort haben wir auch die Mittelsenkrechte zu AB ($|AB| = a$) eingezeichnet, die natürlich durch den Punkt C geht. Weil das Dreieck gleichseitig ist, ist natürlich auch $|AC| = a$ und $|BC| = a$. Daraus können wir sofort eine Faltidee entwickeln: Wir nehmen ein quadratisches Faltpapier $ABCD$ mit der Seitenlänge a und falten die Mittelsenkrechte EF von AB (Bild 17a). Dann müssen wir auf EF nur noch einen Punkt C^* bestimmen, der von A den Abstand a hat. Dieser Punkt hat dann auch automatisch von B den Abstand a , da C^* auf der Mittelsenkrechten von AB liegt. Diesen Punkt C^* bestimmen wir aber durch Falten sehr einfach, indem wir B so auf EF falten, dass die Faltlinie durch A geht (Bild 17b). R bezeichnet den Schnittpunkt dieser Faltlinie mit BC .

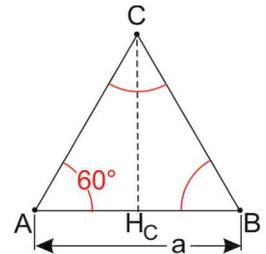


Bild 16

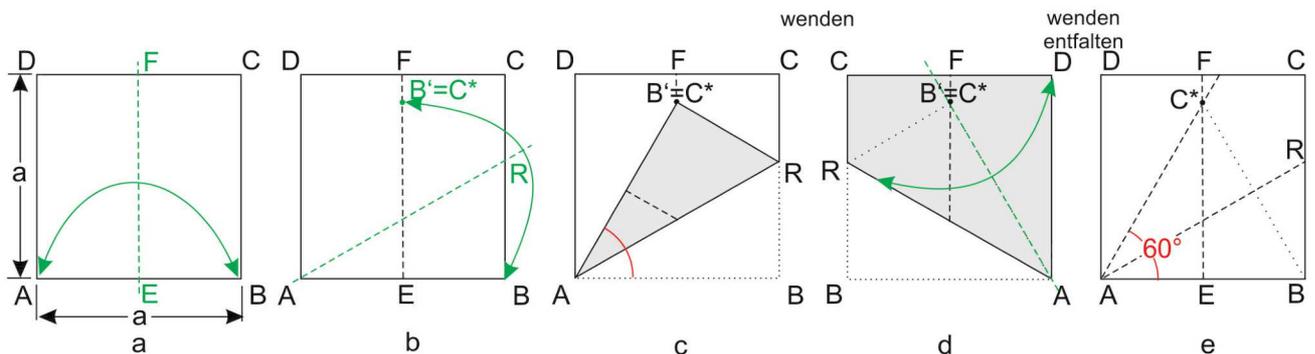


Bild 17: 60° falten

Dann ist klar, dass $|\sphericalangle BAB'| = 60^\circ$ ist (Bild 17c). Es ergibt sich zusätzlich, dass $|\sphericalangle BAR| = |\sphericalangle RAB'| = |\sphericalangle B'AD| = 30^\circ$ ist. Nachdem wir das Faltpapier gewendet haben, falten wir D so auf AR , dass die Faltlinie durch A geht (Bild 17d). Jetzt liegen in A drei Winkel mit der Größe 30° übereinander. Nun entfalten und wenden wir das Faltpapier wieder und erhalten ein Quadrat, in

dem ein 60° -Winkel in der Ecke A gefaltet ist (Bild 17e). Der rechte Winkel in A ist dabei auch gleichzeitig in drei 30° -Winkel eingeteilt.

Natürlich können wir auch noch A auf C^* falten und dann an BC^* von hinten wieder umfalten. So erhalten wir auch eine Faltnie durch B und C^* . Damit haben wir ein komplettes gleichseitiges Dreieck ABC^* im quadratischen Faltpapier $ABCD$ erhalten und somit einen Winkel der Größe 60° . Es folgt dann auch, dass wir Winkel mit den Größen 30° und 15° durch jeweiliges Halbieren erzeugen können. Auch Winkel mit der Größe 120° treten bei unserer Faltung im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des gleichseitigen Dreiecks auf.

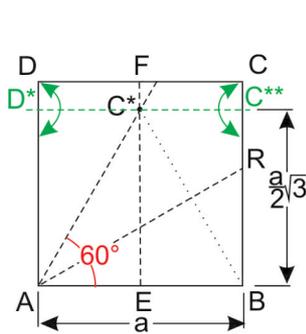


Bild 18

Weil $|EC^*| = \frac{a}{2}\sqrt{3} < a$ ist, passt das gleichseitige Dreieck ABC^* *locker* in unser quadratisches Faltpapier. Daher können wir in jedes beliebige Rechteck ein gleichseitiges Dreieck bezüglich der kurzen Rechteckseite falten.

Bei dieser Gelegenheit falten wir senkrecht zu AD durch C^* und erhalten die Faltnie D^*C^{**} (Bild 18). Die beiden zueinander kongruenten Rechtecke AEC^*D^* und $EBC^{**}C^*$ haben jeweils die Seitenlängen $\frac{a}{2}$ und $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, sind also Rechtecke mit dem Seitenverhältnis $1 : \sqrt{3}$. Damit haben wir neben dem Quadrat ($1 : 1$) und dem DIN-A Format ($1 : \sqrt{2}$) ein weiteres Rechteckformat ($1 : \sqrt{3}$) zur Verfügung.

Im Bild 19 sind diese Rechtecke dargestellt. Zusätzlich ist dort das goldene Rechteck (vgl. Kapitel 4) mit dem Seitenverhältnis $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ aufgenommen.

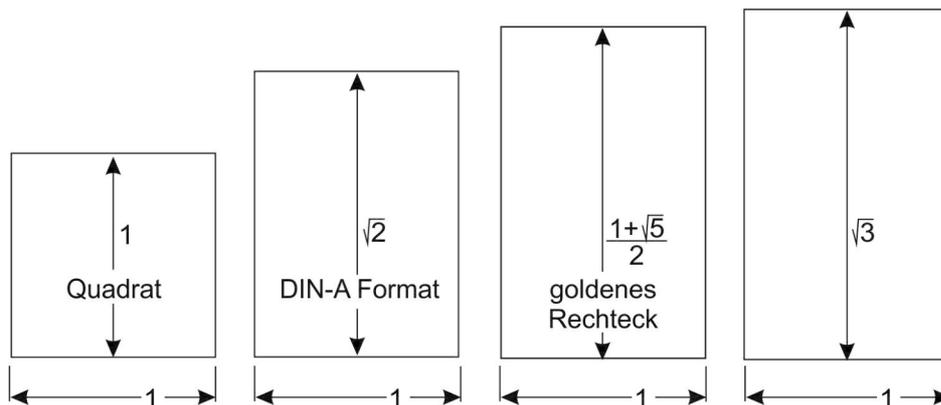


Bild 19: Rechteckformate

Betrachten wir noch einmal Bild 17e, so können wir auch die Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle BAR$ und $\sphericalangle C^*AD$ falten (Bild 20a). Für die erste Winkelhalbierende falten wir B so auf AR , dass die Faltnie durch A geht. Für die zweite müssen wir nur D auf C^* falten, dann geht die zugehörige Faltnie automatisch durch A . G und H sind die entsprechenden Schnittpunkte der

Winkelhalbierenden mit BC bzw. CD . Es ist klar, dass $|AG| = |AH|$ und $|\sphericalangle GAH| = 60^\circ$ ist. Damit ist aber das Dreieck AGH gleichseitig (Bild 20b). Wir können C an GH umfalten (Bild 20c) und wir erhalten ein gleichseitiges Dreieck. Bild 20d zeigt dann das entfaltete Quadrat mit dem gleichseitigen Dreieck AGH .

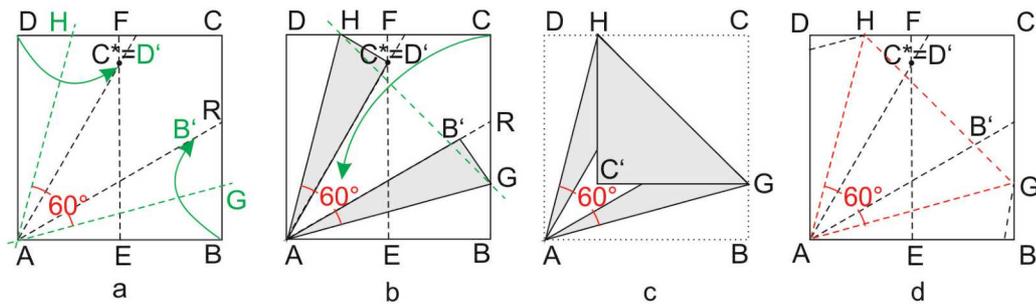


Bild 20: Noch ein gleichseitiges Dreieck.

Vergleichen wir das Dreieck AGH aus Bild 20d mit dem Dreieck ABC^* aus Bild 17e, so können wir feststellen, dass AGH einen größeren Flächeninhalt als ABC^* (bezogen auf gleichgroße Ausgangsquadrate) hat. AGH ist sogar das größte gleichseitige Dreieck, das man in ein gegebenes Quadrat einbeschreiben kann. Dies soll allerdings hier nicht bewiesen werden.

Das Falten des Dreiecks AGH aus Bild 20d lässt sich auch einfacher als bisher erreichen. Wir bedenken, dass D auf C^* gefaltet wurde und C^* auf der Mittelsenkrechten EF von AB liegt. Also muss beim Umfalten von B , sodass die Faltnisse durch A geht, der Punkt B auf der Mittelsenkrechten von AD liegen. Den zugehörigen Faltprozess zeigt Bild 21a - d.

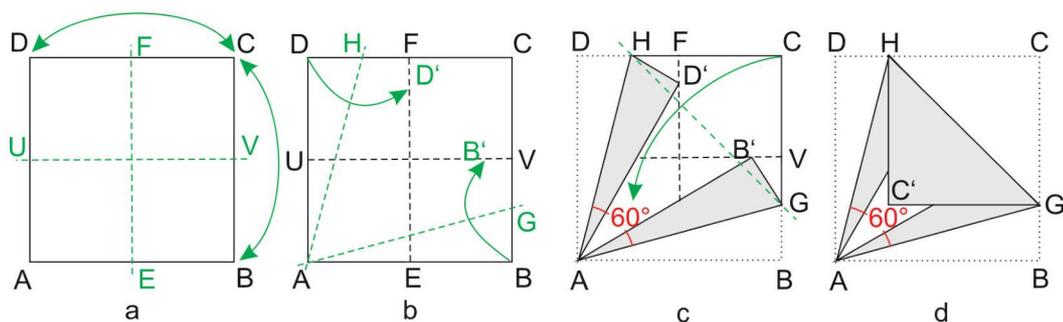


Bild 21: Noch ein gleichseitiges Dreieck.

2.2.4 Der Flächeninhalt von Dreiecken

Mit Hilfe des Falten von Papier können wir uns auch die Formel für den Flächeninhalt von Dreiecken klarmachen. Dazu benötigen wir dreieckiges Faltpapier, das wir uns vorher zuschneiden.

Wir bestimmen den Flächeninhalt für spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke getrennt.

1. Fall: ABC ist spitzwinklig (Bild 22).

Dann liegt der Höhenschnittpunkt im Innern des Dreiecks. Wir wählen eine Dreiecksseite, etwa AB , aus und falten die Höhe h_c von C auf AB (Bild 22a). Dazu falten wir entweder A oder B so auf AB , dass die Faltlinie durch C geht. H_c ist dann der Fußpunkt dieser Höhe. Nun falten wir C auf H_c , wobei die Faltlinie EF (Bild 22b) entsteht. Weil EF die Höhe h_c halbiert, sind auch E bzw. F Mittelpunkte von AC bzw. BC . Damit ist $|AE| = |EC| = |EH_c|$ und $|BF| = |FC| = |FH_c|$ und AH_cE bzw. H_cBF sind jeweils gleichschenkelig. Als nächstes falten wir A und B jeweils nach H_c . EE' und FF' sind die zugehörigen Faltlinien, die auch die Mittelsenkrechten von AH_c bzw. H_cB sind. Dadurch entsteht das Rechteck $E'F'FE$ (Bild 22c), das von zwei Papierschichten bedeckt ist. Folglich ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC doppelt so groß, wie der des Rechtecks $E'F'FE$. Da dieses Rechteck die Seitenlängen $\frac{c}{2}$ und $\frac{1}{2}h_c$ hat, gilt $|ABC| = 2|E'F'FE| = 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{2}h_c = \frac{c \cdot h_c}{2}$.

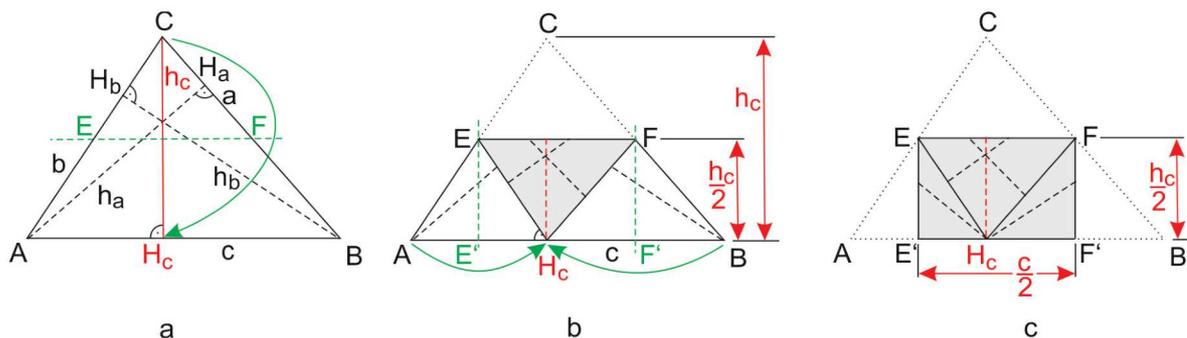


Bild 22: Flächeninhalt im spitzwinkligen Dreieck

Wählen wir an Stelle der Dreiecksseite AB die Seite BC oder AC aus, so können wir analog falten und würden $|ABC| = \frac{a \cdot h_a}{2}$ bzw. $|ABC| = \frac{b \cdot h_b}{2}$ erhalten. Damit können wir für den Flächeninhalt eines (spitzwinkligen) Dreiecks kurz $|ABC| = \frac{g \cdot h_g}{2}$ angeben, wobei g (wie üblich) eine der drei Dreiecksseitenlängen a , b oder c angibt.

2. Fall: ABC ist rechtwinklig (Bild 23).

Nehmen wir an, dass ABC bei A rechtwinklig ist, dann fällt der Höhenschnittpunkt des Dreiecks mit A zusammen (Bild 23a). Der Höhenfußpunkt H_a liegt im Innern von BC , während H_b und H_c mit A zusammenfallen.

Würden wir BC als Grundseite zur Bestimmung des Flächeninhaltes auswählen, dann würden wir mit der Faltung aus dem 1. Fall hier $|ABC| = \frac{a \cdot h_a}{2}$ erhalten.

Wir wählen aber jetzt eine der Katheten, etwa AB , als Grundseite aus. Dann falten wir C auf

$A = H_c$, wobei EF die zugehörige Faltlinie ist. EF halbiert wieder h_c , damit auch AC , und BC (Bild 23a). Schließlich falten wir B auf A und erhalten das Rechteck $AF'FE$, welches ebenfalls aus zwei Schichten Papier besteht.

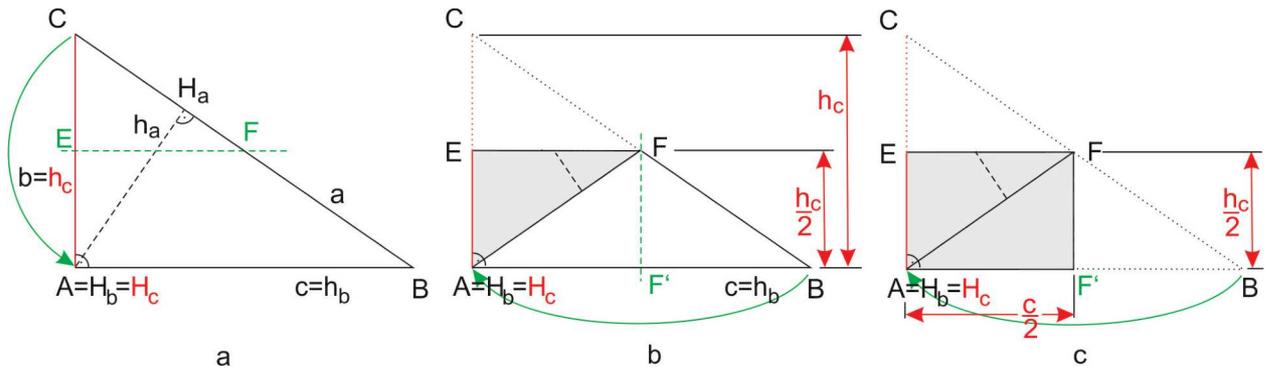


Bild 23: Flächeninhalt im rechtwinkligen Dreieck

Folglich gilt $|ABC| = 2|AF'FE| = 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{h_c}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$. Analog folgt $|ABC| = \frac{b \cdot h_b}{2}$, wenn wir BC als Grundseite wählen. Damit gilt auch für rechtwinklige Dreiecke allgemein $|ABC| = \frac{g \cdot h_g}{2}$.

3. Fall: ABC ist stumpfwinklig (Bild 24).

Nehmen wir an, dass ABC bei A stumpfwinklig ist, dann liegt der Höhenschnittpunkt des Dreiecks außerhalb des Dreiecks (Bild 24). Der Höhenfußpunkt H_a liegt im Innern von BC , während H_b und H_c außerhalb liegen.

Die Bestimmung des Flächeninhaltes dieses Dreiecks (über das Falten des Dreiecks) ergibt wieder $|ABC| = \frac{a \cdot h_a}{2}$, wie im 1. Fall, wenn wir BC als Grundseite für die Flächeninhaltsbestimmung wählen.

Wählen wir dagegen AB (oder AC) als Grundseite für die Flächeninhaltsbestimmung, so können wir mit dem Falten des Dreiecks nichts erreichen. Wir müssen rechnen. Wählen wir AB als Grundseite, so gilt $|ABC| = |H_cBC| - |H_cAC|$. Dabei sind H_cBC und H_cAC rechtwinklige Dreiecke, für die wir den Flächeninhalt bereits berechnen können.

$$\text{Also ist } |ABC| = |H_cBC| - |H_cAC| = \frac{(|H_aA|+c) \cdot h_c}{2} - \frac{|H_aA| \cdot h_c}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

Analog erhalten wir $|ABC| = \frac{b \cdot h_b}{2}$, wenn wir AC als Grundseite wählen. Damit gilt auch für stumpfwinklige Dreiecke allgemein $|ABC| = \frac{g \cdot h_g}{2}$.

Nehmen wir nun alle drei Fälle zusammen, so können wir feststellen, dass für den Flächeninhalt

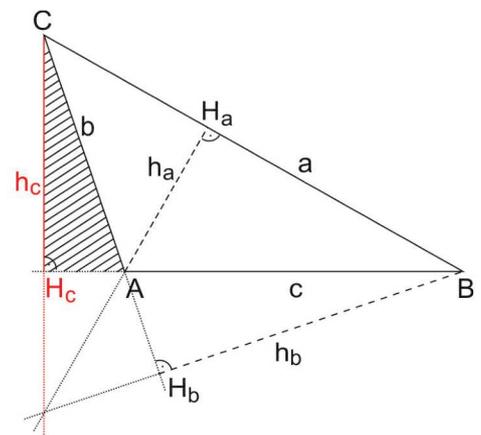


Bild 24: Flächeninhalt im stumpfwinkligen Dreieck

eines beliebigen Dreiecks ABC stets $|ABC| = \frac{g \cdot h_g}{2}$ gilt.

2.2.5 Innenwinkelsumme von Dreiecken

Betrachten wir Bild 22 noch einmal, so fällt uns auf, dass die Ecken des Dreiecks ABC in einem Punkt auf AB zusammentreffen und das sich dort die Innenwinkel des Dreiecks zu 180° ergänzen. Das funktioniert nicht nur für spitzwinklige Dreiecke, sondern auch für rechtwinklige und stumpfwinklige. Im Bild 25b liegt der rechte Winkel bei A und im Bild 25c liegt der stumpfe Winkel bei A .

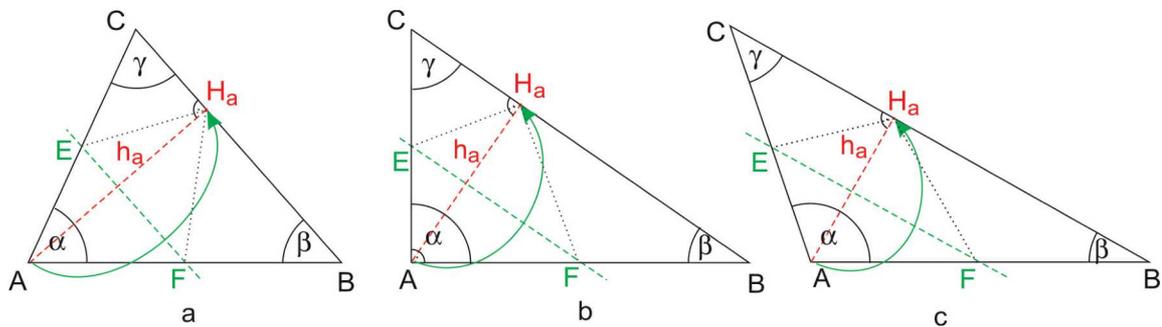


Bild 25: Innenwinkelsumme im Dreieck

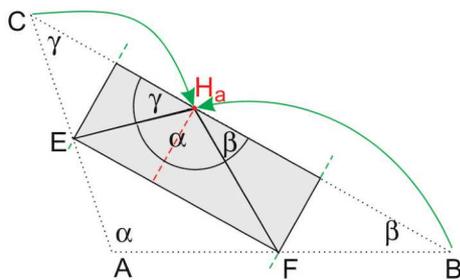


Bild 26: Innenwinkelsumme im stumpfwinkligen Dreieck

In allen drei Fällen bestimmen wir die Höhe h_a von A auf BC . Der Höhenfußpunkt H_a liegt immer im Innern der Dreiecksseite. Dann falten wir A auf H_a , wobei die Faltnisse EF entsteht. Diese Faltnisse ist die Mittelsenkrechte von h_a . Damit ist EF aber parallel zu BC und halbiert h_a . Außerdem sind damit E und F Mittelpunkte von AC bzw. AB . Folglich ist $|CE| = |EA| = |EH_a|$ und $|BF| = |FA| = |FH_a|$, d.h., EH_aC und FBH_a sind gleichschenklige Dreiecke. Folglich gehen die Mittelsenkrechten von CH_a und BH_a durch E bzw. F . Deshalb gehen die Punkte C und B beim Falten an

diesen Mittelsenkrechten in H_a über und alle drei Innenwinkel des Dreiecks liegen in H_a akkurat zusammen und ergänzen sich zu 180° . Bild 26 zeigt dies für das stumpfwinklige Dreieck. Damit haben wir den **Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck**

In jedem Dreieck ergänzen sich die Innenwinkel zu einem gestreckten Winkel.

bewiesen.

2.2.6 Eine Extremwertaufgabe

Gegeben ist ein bei A rechtwinkliges Dreieck. Gesucht ist ein Rechteck mit größtmöglichem Flächeninhalt, wobei das Rechteck dem Dreieck einbeschrieben ist.

Wir müssen zwei Lagemöglichkeiten des Rechtecks im Dreieck untersuchen, die in den Bildern 27a und b dargestellt sind. Im **1. Fall** (Bild 27a) liegt das Rechteck $EFGH$ in der rechtwinkligen Ecke A des Dreiecks und im **2. Fall** (Bild 27b) liegt es der Ecke A des Dreiecks gegenüber, wobei eine Rechteckseite auf der Hypotenuse des Dreiecks liegt.

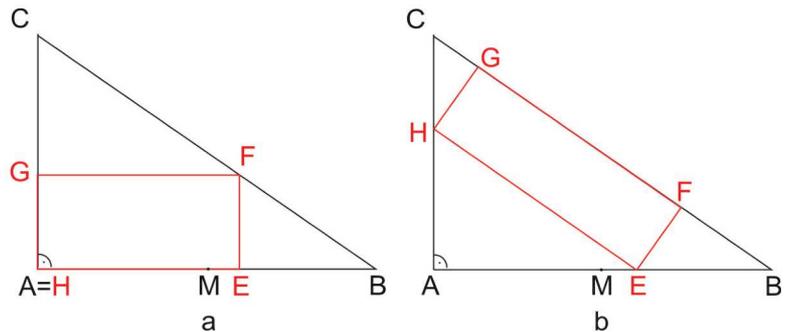


Bild 27: Welche Lagemöglichkeit ist die Beste?

Wir müssen in jedem der beiden Fälle das flächengrößte Rechteck finden und von den beiden Lösungen das flächengrößere Rechteck auswählen. Dann haben wir unsere Aufgabe gelöst.

In beiden Fällen ist das entsprechende Rechteck durch die Vorgabe des Punktes E auf AB eindeutig bestimmt. Wir werden jeweils drei Lagemöglichkeiten von E auf AB untersuchen: E liegt zwischen M und B , E liegt zwischen A und M und $E = M$, wobei M den Mittelpunkt von AB bezeichnet.

Fall 1.1: E sei ein beliebiger Punkt auf AB , der zwischen M und B liegt (Bild 28a). Dann ist $|EB| < \frac{1}{2}|AB|$ und damit auch $|BF| < \frac{1}{2}|BC|$ und $|AG| < \frac{1}{2}|AC|$. Nun falten wir B an EF und C an FG um. Weil $|EB| < \frac{1}{2}|AB|$ liegt B' innerhalb von AE . Weil $|AG| < \frac{1}{2}|AC|$ ist, ist $|GC| > \frac{1}{2}|AC|$ und folglich liegt C' außerhalb von AG . Die beiden umgefalteten Kanten EC' und EB passen natürlich direkt zusammen, da sich die entsprechenden Winkel bei E zu 90° ergänzen. Das Rechteck $EFGH$ ist damit mit zwei Schichten Papier bedeckt, und zusätzlich ragt das Dreieck $C'B'A$ über das Rechteck hinaus. Dies bedeutet aber, dass $|EFGH| < \frac{1}{2}|ABC|$ ist.

Fall 1.2: E sei ein beliebiger Punkt auf AB , der diesmal zwischen A und M liegt (Bild 28b). Dann ist $|EB| > \frac{1}{2}|AB|$ und damit auch $|BF| > \frac{1}{2}|BC|$ und $|AG| > \frac{1}{2}|AC|$. Auch jetzt falten wir B an EF und C an FG um. Diesmal liegt C' innerhalb von AG und B' außerhalb von AE . Natürlich passen auch hier die umgefalteten Kanten EC' und EB direkt zusammen, sodass das Rechteck $EFGH$ mit zwei Schichten Papier bedeckt ist, und zusätzlich das Dreieck $B'AC'$ über das Rechteck hinaus ragt. Dies bedeutet aber, dass $|EFGH| < \frac{1}{2}|ABC|$ ist.

Fall 1.3: Diesmal ist $E = M$, der Mittelpunkt von AB . Dann ist auch F der Mittelpunkt von BC und G die Mitte von CA (Bild 28c). Falten wir nun B an EF und C an FG um, so fallen

die zugehörigen Bildpunkte B' und C' in den Punkt A . Auch hier ist das Rechteck $EFGH$ mit zwei Schichten Papier bedeckt. Es gibt dabei keine Lücken und keine überstehenden Teile. Also ist $|EFGH| = \frac{1}{2}|ABC|$.

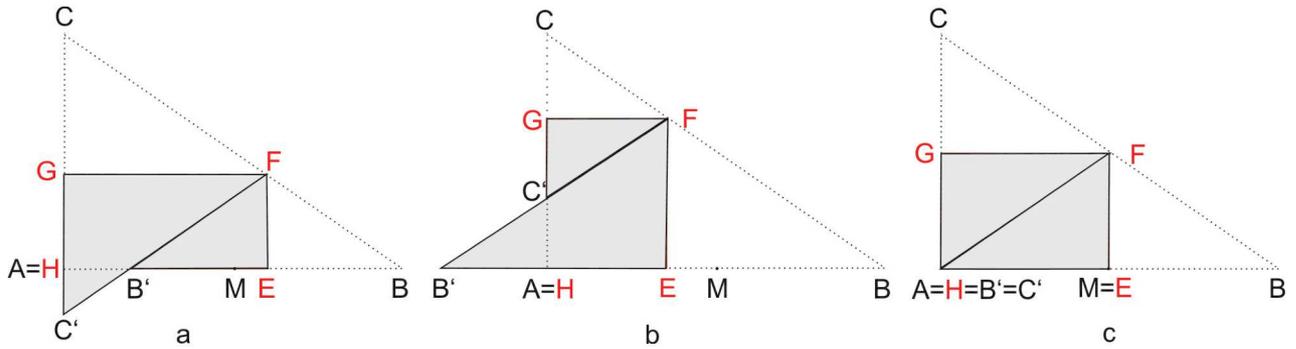


Bild 28

Zusammengefasst erhalten wir, dass es im 1. Fall genau ein flächengrößtes einbeschriebenes Rechteck gibt. Dieses ergibt sich, wenn E, F, G die Mittelpunkte der Dreiecksseiten sind. Der Flächeninhalt dieses flächengrößten Rechtecks ist genau $\frac{1}{2}|ABC|$.

Fall 2.1: E sei ein beliebiger Punkt auf AB , der zwischen M und B liegt (Bild 29a).

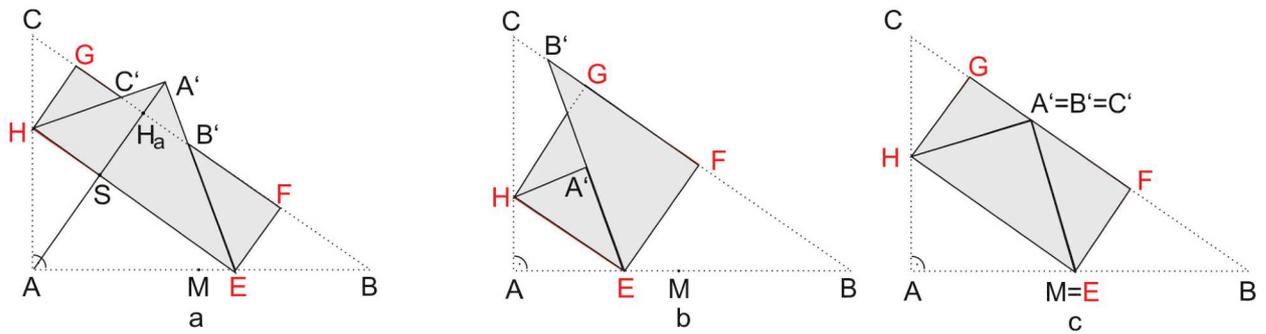


Bild 29

Zusätzlich zeichnen wir die Höhe von A auf BC ein, die den Höhenfußpunkt H_a hat. Mit S bezeichnen wir den Schnittpunkt dieser Höhe mit EH . Weil $|EB| < \frac{1}{2}|AB|$ ist, ist auch $|SH_a| < \frac{1}{2}|AH_a|$ und damit $|AS| > \frac{1}{2}|AH_a|$. Folglich liegt A' , der beim Umfalten von A an EG entsteht, außerhalb des Dreiecks. Nun werden noch B an EF und C an GH umgefaltet. Die umgefalteten Kanten EB' bzw. HC' liegen direkt an EA' bzw. HA' , da sich die entsprechenden Winkel bei E bzw. H zu je 90° ergänzen. Damit ist das Rechteck $EFGH$ mit zwei Schichten Papier bedeckt, und zusätzlich ragt das Dreieck $C'B'A'$ über das Rechteck hinaus. Dies bedeutet aber, dass $|EFGH| < \frac{1}{2}|ABC|$ ist.

Fall 2.2: E sei ein beliebiger Punkt auf AB , der zwischen A und M liegt (Bild 29b). Dann falten wir A an EH um, und diesmal liegt der Punkt A' innerhalb des Dreiecks. Falten wir jetzt C an GH und dann B an EF um, so wird sogar ein Teil des Rechteckes dreifach und nicht nur doppelt mit Papier bedeckt. Außerdem liegt B' außerhalb des Rechtecks, woraus sich hier $|EFGH| < \frac{1}{2}|ABC|$ ergibt.

Fall 2.3: Nun ist wieder $E = M$, der Mittelpunkt von AB (Bild 29c). Dann ist $|AS| = |SH_a|$ und beim Umfalten von A an EH kommt A' auf BC zu liegen. Falten wir noch B an EF und C an GH um, so fallen die Bildpunkte B' und C' mit A' zusammen. Somit ist das Rechteck $EFGH$ mit zwei Schichten Papier bedeckt. Es gibt dabei keine Lücken und keine überstehenden Teile. Also ist $|EFGH| = \frac{1}{2}|ABC|$.

Zusammengefasst erhalten wir, auch hier im 2. Fall, dass es genau ein flächengrößtes einbeschriebenes Rechteck gibt. Dieses ergibt sich, wenn E und H die Mittelpunkte der Dreiecksseiten AB und AC sind und F und G auf BC liegen. Der Flächeninhalt dieses flächengrößten Rechtecks ist genau $\frac{1}{2}|ABC|$.

Fassen wir die Ergebnisse aus dem 1. und 2. Fall zusammen: Das flächengrößte Rechteck, das einem rechtwinkligen Dreieck einbeschrieben werden kann, hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}|ABC|$. Es gibt genau zwei verschiedene solche Rechtecke.

2.3 Warum entstehen beim Papierfalten Geraden?

Diese Frage stellt FREUDENTHAL im 2. Band seines Buches *Mathematik als pädagogische Aufgabe* [10] als Einstieg in §16, als es um die Frage geht, was Geometrie ist.

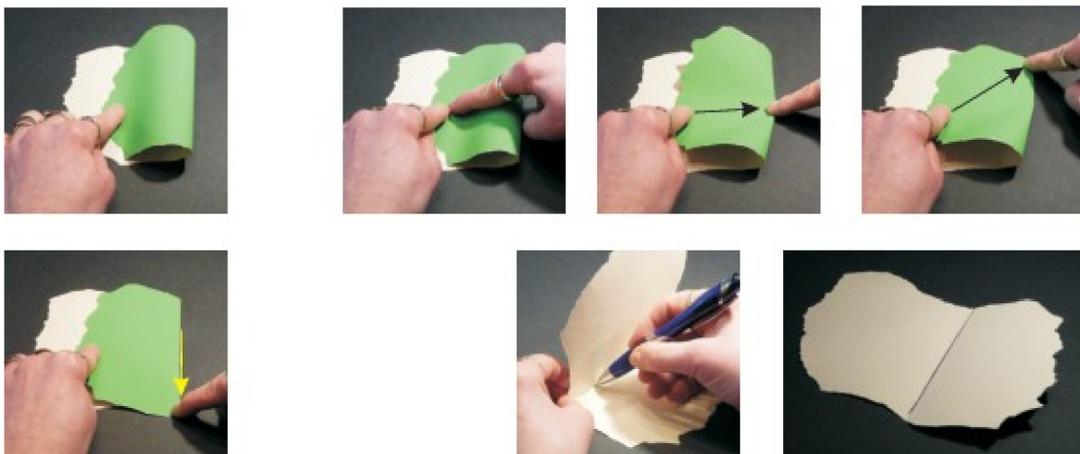


Bild 30: eine Faltlinie erzeugen

Es ist die erste von einer größeren Anzahl von Fragen, die FREUDENTHAL stellt, wenn man mit der Erforschung des Raumes beginnen will.

Wenden wir uns dem Faltprozess zu und falten ein unregelmäßiges Blatt Papier (Bild 30). Dabei klappen wir einen Teil des Blattes über den anderen, fixieren dies mit einem Finger einer Hand, während ein Finger der anderen Hand von dem fixierten Punkt zur Faltlinie hin streicht. Dies kann man mehrmals tun und anschließend die Faltlinie glatt streichen.

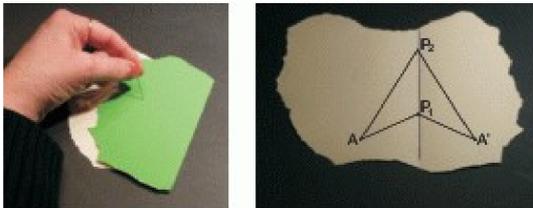


Bild 31: Punkte markieren

Anschließend kann man mit einem Stift die Faltlinie in dem teilweise geöffneten Blatt nachzeichnen und das Blatt ganz entfalten. Wir sehen, dass unsere Faltlinie wie eine Gerade (natürlich nur ein Stück davon) aussieht. Ist dies aber tatsächlich so? Um diese Frage zu beantworten, denken wir noch einmal an den Faltprozess. Wir haben das Blatt zuerst umgeklappt und es an einer Stelle fixiert. Dabei entstehen zwei übereinander liegende Punkte A und A' , einer in der oberen und der andere in der unteren Papierschicht. Wir können diese Punkte zum Beispiel mit einer Nadel, die wir an der fixierten Stelle durch das Papier stechen, markieren (Bild 31). Anschließend haben wir, ausgehend von der fixierten Stelle das Blatt in mehreren Richtungen hin zur Faltlinie glatt gestrichen.

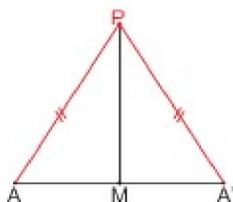


Bild 32

Dabei haben wir auf der Faltlinie mehrere Punkte P_1, P_2, \dots markiert. Öffnen wir das Blatt wieder und verbinden A und A' jeweils mit P_1, P_2, \dots , so ist klar, dass die markierten Punkte P_i jeweils von A und A' gleichweit entfernt sind. Die Faltlinie enthält damit nur Punkte, die von A und A' jeweils gleich weit entfernt sind. Was für eine Linie bilden diese Punkte?

Betrachten wir nun in der Ebene zwei feste Punkte A und A' und einen beliebigen Punkt P für den $|AP| = |A'P|$ gilt (Bild 32). Wir verbinden P mit A und A' mit A' und bestimmen den Mittelpunkt M von AA' (Bild 32).

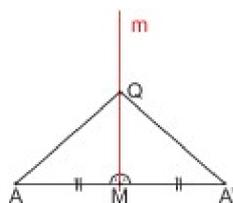


Bild 33

Außerdem verbinden wir noch P mit M . Die beiden Dreiecke AMP und $A'MP$ haben die gleichen Seitenlängen, folglich sind sie kongruent zueinander. Daraus folgt sofort, dass auch die Winkel $\sphericalangle AMP$ und $\sphericalangle A'MP$ zueinander kongruent sind. Weil diese beiden Winkel aber Nebenwinkel sind, müssen es rechte Winkel sein und folglich liegt P auf der Mittelsenkrechten von AA' . Damit liegen alle Punkte P , die von zwei festen Punkten A und A' gleich weit entfernt sind, auf der Mittelsenkrechten von AA' .

Wir müssen noch überprüfen, ob es auf der Mittelsenkrechten der Strecke AA' eventuell auch Punkte

gibt, für die der Abstand zu A und A' nicht gleich ist. Dazu betrachten wir die Mittelsenkrechte m von A und A' und darauf einen Punkt Q . M bezeichnet wieder den Mittelpunkt von AA' (Bild 33). Wir verbinden Q mit A und A' und erkennen, dass die beiden Dreiecke AMQ und $A'MQ$ (wegen $AM \cong A'M$, MQ ist in beiden Dreiecken enthalten und $\sphericalangle AMQ \cong \sphericalangle A'MQ$) kongruent zueinander sind. Folglich ist $AQ \cong A'Q$ und Q hat von A und A' den gleichen Abstand.

Damit ist die Menge der Punkte der Ebene, die von zwei festen Punkten gleich weit entfernt sind die Mittelsenkrechte der betrachteten Strecke. Da die Mittelsenkrechte aber eine Gerade ist folgt, dass unsere Faltlinie beim Papierfalten eine Gerade ist und die eingangs gestellte Frage ist beantwortet.

3 Unser Faltpapier

Normalerweise ist das Faltpapier mit dem wir arbeiten nicht unregelmäßig. Wir verwenden in der Regel Origamipapier und das ist quadratisch. Auch unser normales Schreibpapier (DIN-A4 oder DIN-A5) leistet gute Dienste. Mehrere Beispiele beziehen sich auf diese speziellen Rechtecke.

Unser normales Schreibpapier hat ein besonderes Seitenverhältnis, das sich daraus ergibt, dass beim Halbieren eines DIN-A Blattes parallel zur kurzen Blattkante zwei kleinere DIN-A Blätter entstehen, die zum Ausgangsblatt ähnlich sind. Z.B. entstehen aus einem DIN-A4 Blatt zwei DIN-A5 Blätter. Im Mathematikunterricht wird dies üblicherweise bei der Behandlung der Ähnlichkeit besprochen.

Betrachten wir nämlich ein beliebiges Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen a und b ($a < b$), so wie es im Bild 34a gezeigt ist. Nehmen wir ein dazu kongruentes Rechteck, halbieren dieses parallel zur kurzen Seite a , so erhalten wir zwei neue, zueinander kongruente Rechtecke mit den Seitenlängen $\frac{b}{2}$ und a . Eins davon legen wir neben $ABCD$ so hin, wie es im Bild 34b gezeigt ist und bezeichnen dieses kleinere Rechteck mit $EFGH$.

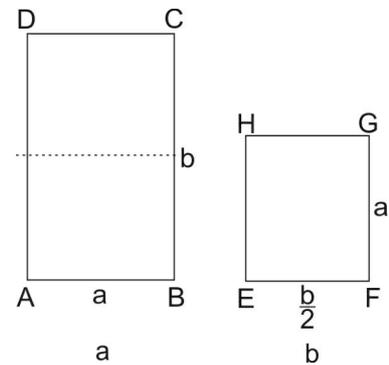


Bild 34: DIN-Reihe

Nun verlangen wir, dass die beiden Rechtecke $ABCD$ und $EFGH$ ähnlich zueinander sein sollen. Dann müssen die Verhältnisse entsprechender Seiten übereinstimmen, d.h., es muss $\frac{|AB|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|FG|}$ gelten. Damit muss aber $\frac{a}{\frac{b}{2}} = \frac{b}{a}$ bzw. $a^2 = \frac{1}{2}b^2$ sein,

woraus $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ bzw. $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ folgt. Damit ist klar, dass ein Rechteck genau dann die Eigenschaft hat, dass es zu seiner Hälfte ähnlich ist, wenn das Verhältnis aus langer zu kurzer Seite ($\frac{b}{a}$) den Wert $\sqrt{2}$ hat. Dies ist für unser DIN-A4 Blatt erfüllt, wie wir auch durch Messen der Kantenlängen eines DIN-A4 Blattes (angenähert) bestätigen können. Das Messen eines DIN-A4 Blattes ergibt eine Breite von $a = 209\text{mm}$ und eine Höhe von $b = 296\text{mm}$. Daraus erhalten wir $\frac{b}{a} \approx 1,416$, also eine sehr gute Annäherung an $\sqrt{2}$.

Unser DIN-Format wurde aufgrund des Drängens des Chemie-Nobelpreisträgers und späteren Wissenschaftsorganisator WILHELM OSTWALD (1853 - 1932) vom Deutschen Normenausschuss 1922 als Standard festgelegt (vgl. [9], S. 8). Zu Ehren von WILHELM OSTWALD nennt FLACHSMEYER [1] ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ OSTWALDSches Rechteck. Dies wollen wir auch hier beibehalten und bezeichnen Rechtecke mit dem Seitenverhältnis $1 : \sqrt{2}$ als Ostwaldsche Rechtecke.

Zur Festlegung der DIN-A-Reihe reicht das Seitenverhältnis allerdings nicht aus. Es wurde weiterhin festgelegt, dass DIN-A0 einen Flächeninhalt von 1m^2 hat. Dazu aber in 3.6 mehr.

3.1 Ein Quadrat aus einem Rechteck

Wir benötigen aber auch quadratisches Faltpapier. Dies können wir uns aus normalem Kopierpapier (DIN-A4) selber zuschneiden. Für unsere Zwecke hat dieses Papier sogar mehrere Vorteile: Es ist fast immer verfügbar, „Schmierpapier“ kann verarbeitet werden, die Papiergröße eignet sich gut zum Experimentieren und man kann gut auf diesem Papier schreiben und zeichnen. Dies ist manchmal sinnvoll, um Faltnlinien deutlicher hervorzuheben oder um sich Zusammenhänge klarzumachen. Natürlich geht es auch um das Begründen, dass die gefalteten Vierecke tatsächlich Quadrate sind.

Variante 1: Hier beschreiben wir eine allgemein bekannte Variante, die oft benutzt wird, um aus einem DIN-A4-Blatt ein Quadrat herzustellen.

Wir gehen von einem beliebigen Rechteck $ABCD$ aus, bei dem AB die kurze und AD die lange Kante ist. Nun falten wir die kurze Kante AB des Rechtecks auf die lange Kante AD , sodass die Faltnlinie durch A geht (Bild 35a). Dabei geht B in B' auf AD über und die Faltnlinie markiert auf BC den Punkt E .

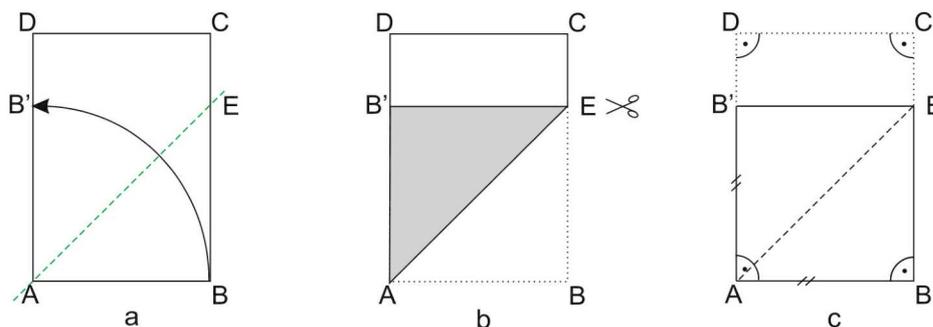


Bild 35: Quadrat aus Rechteck 1

Nun können wir entlang EB' den überstehenden Teil des Ausgangspapiers abtrennen und nach dem Auffalten erhalten wir ein Quadrat $ABEB'$.

Dass $ABEB'$ tatsächlich ein Quadrat ist, kann leicht eingesehen werden (Bild 35c). Dabei ist es von Bedeutung, dass das Ausgangspapier ein Rechteck ist, also in den vier Ecken A , B , C und D jeweils ein rechter Winkel liegt. Durch die Faltung von B nach B' überträgt sich der rechte Winkel von B in den von B' , womit $B'E$ parallel zu AB ist. Folglich ist, weil auch nach Voraussetzung AB' parallel zu BE ist, $ABEB'$ ein Rechteck. Da wegen der Faltung von B nach B' auch AB und AB' gleichlang sind, ist dieses Rechteck ein Quadrat.

Variante 2: Die eben beschriebene Faltvariante, um ein Quadrat aus einem Rechteck herzustellen, hat den Nachteil, dass im Quadrat immer eine Faltnlinie (eine Diagonale) vorhanden ist.

Nun soll aus einem Rechteck ein Quadrat hergestellt werden, das keine Faltnlinie in seinem Inneren enthält. Dazu sind allerdings zwei Rechtecke $ABCD$ und $EFGH$ nötig, bei denen die kurzen Kanten

gleichlang sind. Ein Blatt ist gegenüber dem anderen um 90° gedreht und beide Blätter werden an einer Ecke Kante an Kante bündig übereinander gelegt (Bild 36a). Nun falten wir die beiden überstehenden Rechtecke entlang der Papierkante des jeweils anderen Blattes um. So erhalten wir in beiden Rechtecken jeweils ein Quadrat $ABYH$ (Bild 35b), welche keine inneren Faltnlinien enthalten. Die Begründung dafür, dass es sich in beiden Fällen um Quadrate handelt, ist sehr einfach. Man hat immer rechte Innenwinkel und gleichlange Seiten.

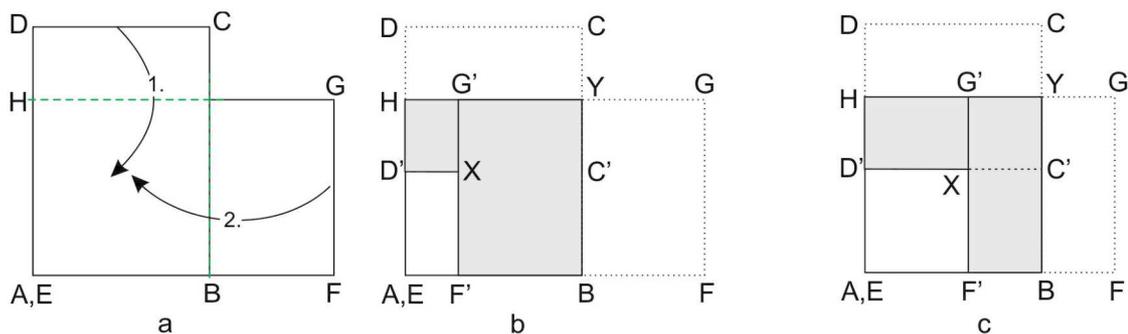


Bild 36: Quadrat aus Rechteck 2

Sind beide Rechtecke kongruent zueinander (Bild 36c) und ist $|AD| < 2|AB|$, dann bezeichnen wir mit X den Schnittpunkt der beiden umgefalteten Kanten $C'D'$ und $F'G'$. In diesem Fall sind $AF'XD'$ und $XC'YG'$ ebenfalls Quadrate.

Ist $|AD| = 2|AB|$, dann ist $X = A$. In diesem Fall erhalten wir sogar vier zueinander kongruente Quadrate. Diese hätten wir auch einfacher durch Halbieren der beiden Rechtecke parallel zur kurzen Kante herstellen können.

3.2 Ein Quadrat aus Ostwaldschen Rechtecken

Nun ist ein Ostwaldsches Rechteck die Grundlage für das Falten eines Quadrates. Dies kann natürlich auch wie in 3.1 erfolgen. Hier soll jedoch eine andere Variante erläutert werden.

Mit den Bezeichnungen aus Bild 37a falten wir so, dass D auf der Rechteckseite BC zu liegen kommt und die Faltnlinie dabei durch A geht. D' ist das Bild von D auf BC bei dieser Faltung. D' markieren wir mit einem Stift auf BC .

Nach dem Auffalten wird C so auf BC gefaltet, dass die Faltnlinie durch D' geht. Diese Faltnlinie markiert auf AD den Punkt F . Falten wir das Papier wieder auseinander, so erkennt man das Quadrat $ABD'F$.

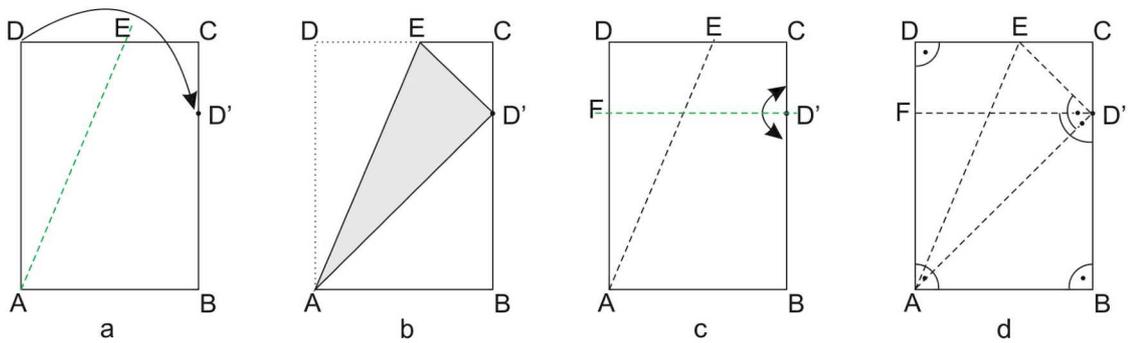


Bild 37: Quadrat aus Rechteck 3

Wegen der Faltung von C auf BD' ist $|\sphericalangle BD'F| = 90^\circ$ (Bild 37d). Damit ist aber $ABD'F$ ein Rechteck. Um zu zeigen, dass $ABD'F$ auch ein Quadrat ist, müssen wir z.B. nur noch $|AB| = |BD'|$ nachweisen.

Diese Gleichheit ergibt sich aus einer Eigenschaft des Ostwaldschen Rechtecks. Es ist nämlich $|AD| = |AB| \cdot \sqrt{2}$.

Da sich beim Falten von D nach D' auch $|AD'| = |AD|$ ergibt, folgt mit dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck ABD' : $|BD'| = \sqrt{|AD'|^2 - |AB|^2} = \sqrt{2 \cdot |AB|^2 - |AB|^2} = \sqrt{|AB|^2} = |AB|$. Damit ist aber $ABD'F$ ein Quadrat.

3.3 Ein Quadrat aus unregelmäßigem Papier

Nun wird ein Quadrat aus einem unregelmäßigen Papier hergestellt.

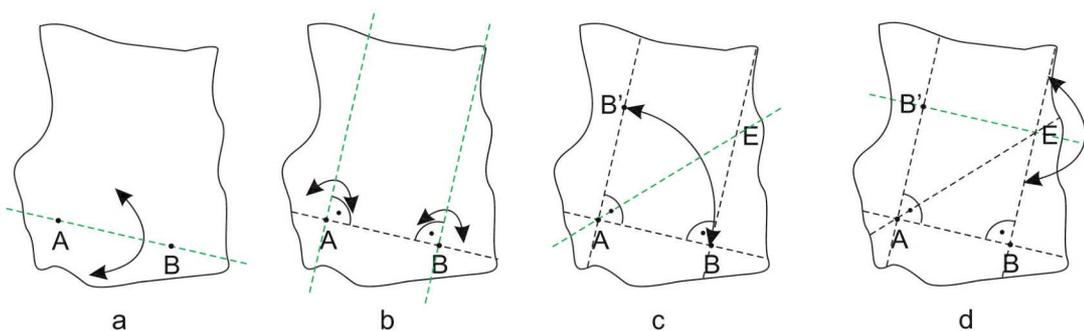


Bild 38: Quadrat aus Rechteck 4

Wir falten das Papier an einer beliebigen Stelle, sodass eine Faltnie entsteht (Bild 38a). Auf dieser Faltnie legen wir zwei Punkte A und B beliebig fest. Die Länge der Strecke AB ist dann die Seitenlänge des Quadrates. Das bedeutet aber auch, dass wir beim Festlegen der beiden Punkte aufpassen müssen, damit das Quadrat auch auf das Papier passt.

Nun falten wir so durch A , dass die Faltnlinie AB auf sich zu liegen kommt. Dadurch entsteht eine Faltnlinie durch A , die auf AB senkrecht ist. Ebenso wird die zu AB senkrechte Faltnlinie durch B gefaltet. Dann sind auf dem Papier drei Faltnlinien zu sehen, die bei A und B jeweils rechte Winkel bilden und an einen Teil eines Rechtecks erinnern. Deshalb falten wir jetzt entsprechend der 1. Variante weiter. Dazu wird B auf die Senkrechte von AB durch A so gefaltet, dass die Faltnlinie durch A geht (Bild 38b). B' , das Bild von B , müssen wir auf dieser Senkrechten markieren. Diese Faltnlinie bestimmt auf der anderen Senkrechten zu AB den Punkt E . Nachdem wir des Papier wieder aufgefaltet haben, wird so durch E gefaltet, dass die Faltnlinie BE auf sich zu liegen kommt (Bild 38d). Nachdem wir auch diesmal wieder das Papier aufgefaltet haben, erkennen wir im unregelmäßigen Papier ein Quadrat. Die vierte Quadratseite geht dann natürlich durch B' .

Eine Begründung dafür, dass es sich tatsächlich um ein Quadrat handelt, ist hier nicht nötig. Sie ergibt sich aus den Überlegungen der Variante 1.

Das gefaltete Quadrat kann nun ausgeschnitten werden, oder man faltet die unregelmäßigen Papierkanten nach 'hinten' um, sodass ein 'sauberes' Quadrat übrig bleibt.

3.4 Ein Ostwaldsches Rechteck aus einem Quadrat

Nun brauchen wir ein Ostwaldsches Rechteck, also ein Rechteck, das zum DIN-A 4 Blatt ähnlich ist, haben aber nur ein Papierquadrat zur Verfügung.

Um dieses Problem zu lösen, betrachten wir ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a . Zuerst nehmen wir an, dass wir ein Rechteck $STUV$, welches zu einem DIN-A 4 Papier ähnlich ist, im Quadrat gefunden haben. In Bild 39 ist dieses Rechteck $STUV$ so eingezeichnet, dass $S = A$ und $T = B$ ist. Es ist klar, dass ein Rechteck dieser Art mit einer größeren Fläche nicht möglich ist.

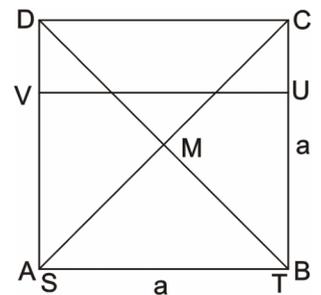


Bild 39: Rechteck im Quadrat

Nun überlegen wir welche Eigenschaften sich daraus ergeben, und wie wir anschließend eine Folge von Faltungen mit dem gewünschten Ziel entwickeln können.

Weil $STUV = ABUV$ ein Ostwaldsches Rechteck ist, gilt: $\frac{|AB|}{|AV|} = \sqrt{2}$. Folglich ergibt sich $|AV| = \frac{|AB|}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Andererseits hat natürlich auch eine halbe Diagonale im Ausgangsquadrat die Länge $\frac{a}{\sqrt{2}}$, also ist insbesondere $|AM| = \frac{a}{\sqrt{2}}$, wobei M den Schnittpunkt der Diagonalen im Quadrat bezeichnet. Nun muss nur noch die Strecke AM auf die Quadratseite AD übertragen werden. Eine mögliche Faltfolge ist in den Bildern Bild 40 gezeigt, wobei beim Übergang von Bild 40c zu Bild 40d das umgefaltete Dreieck $AD'E$ wieder aufgefaltet wird. Dabei geht die Faltmarkierung

von M auf AD' in M' auf AD über. Abschließend wird noch DC um die Senkrechte auf AD durch M' gefaltet. Dadurch entsteht auf BC der Punkt G . $ABGM'$ ist nun das gesuchte Rechteck, in dem $|AB| = |AM'| \sqrt{2}$ gilt, also ein Ostwaldsches Rechteck.

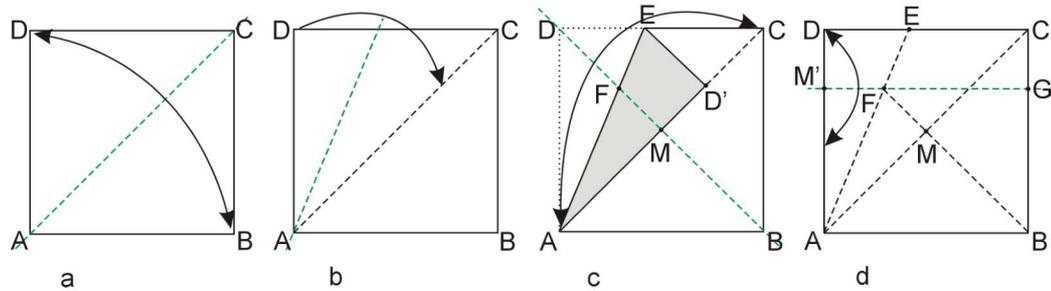


Bild 40

Nun kann man entlang GM' das Quadrat teilen und erhält ein Ostwaldsches Rechteck $ABGM'$.

3.5 Ein Ostwaldsches Rechteck aus unregelmäßigem Papier

Natürlich können wir auch ein Ostwaldsches Rechteck in ein unregelmäßiges Papier falten. Dazu wird das Papier an einer beliebigen Stelle gefaltet, sodass eine Faltlinie entsteht (Bild 41a). Auf dieser Faltlinie werden zwei Punkte A und B beliebig festgelegt. Die Länge der Strecke AB ist dann die kurze Seitenlänge des gesuchten Ostwaldschen Rechtecks. Auch hier müssen wir beim Festlegen der beiden Punkte aufpassen, damit das Rechteck später auch auf das Papier passt.

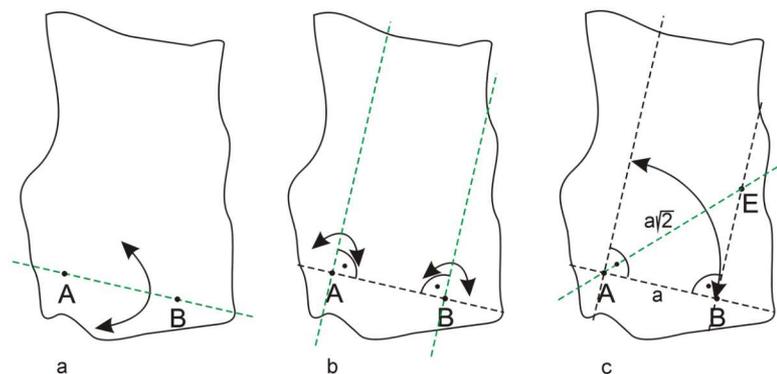


Bild 41

Nun falten wir so durch A , dass die Faltlinie AB auf sich zu liegen kommt. Dadurch entsteht eine Faltlinie durch A , die auf AB senkrecht ist. Ebenso wird die zu AB senkrechte Faltlinie durch B gefaltet (Bild 41b). Dann sind auf dem Papier drei Faltlinien zu sehen, die bei A und B jeweils rechte Winkel bilden. Nun falten wir AB so auf die Senkrechte von AB durch A , dass die Faltlinie

durch A geht (Bild 41c). Diese Faltnlinie markiert auf der Senkrechten zu AB durch B den Punkt E .

Ist a die Länge von AB , dann ist auch a die Länge von BE und es ist weiterhin $|AE| = a\sqrt{2}$. Damit hat AE die Länge der zweiten Seite des gesuchten Ostwaldschen Rechtecks. Diese Streckenlänge muss nun noch auf die beiden Senkrechten von AB übertragen werden, damit ein Ostwaldsches Rechteck entsteht. Dies kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen.

Variante 1: Wir falten das Papier entlang der Senkrechten auf AB durch A nach hinten um (Bild 42a) und anschließend diese Senkrechte auf AE , sodass die Faltnlinie durch A geht (Bild 42b). Dabei entsteht auf der umgefalteten Senkrechten der Punkt E' . Den Punkt E' markieren wir z.B. mit einem Bleistift. Dann falten wir wieder auf und falten die Senkrechte durch E' zu AE' . Diese Senkrechte schneidet die Senkrechte zu AB durch B in F (Bild 42c). $ABFE'$ ist ein Ostwaldsches Rechteck.

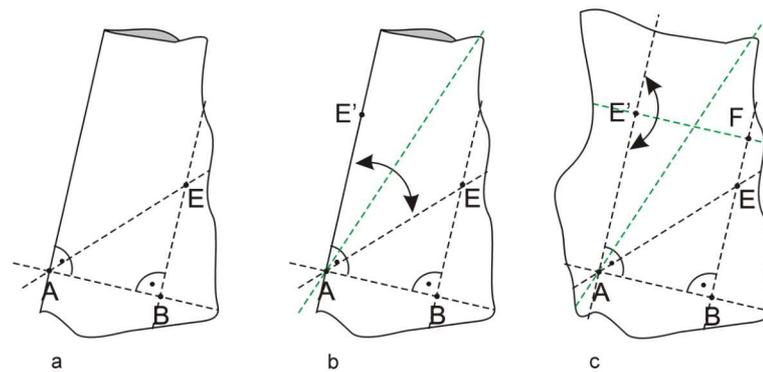


Bild 42

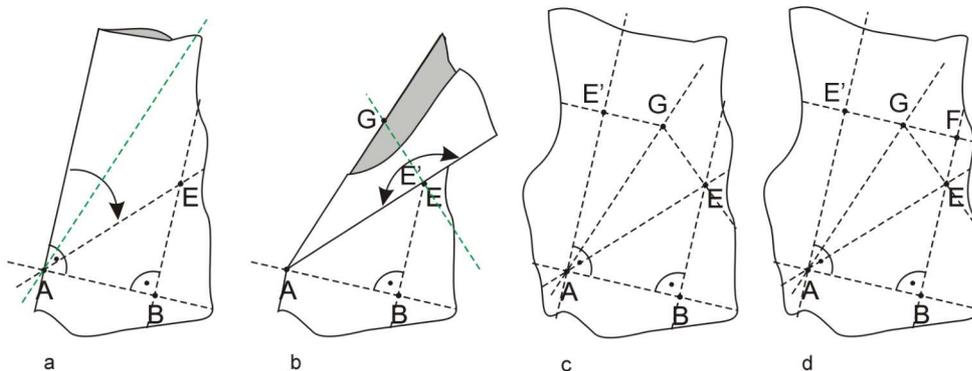


Bild 43

Das Markieren des Punktes E' mit einem Stift können wir uns auch sparen. Nachdem wir das Papier entlang der Senkrechten auf AB durch A nach hinten gefaltet haben (Bild 43a), falten wir

diese Senkrechte wieder auf AE (Bild 43b). Nun falten wir die Faltnie AE so auf sich selbst, dass diese durch E geht (Bild 43c). Dabei entstehen die Punkte E' und G auf den zugehörigen Faltnien. Bild 43c zeigt die Situation nach dem Auffalten. Es ist klar, dass der Winkel $\sphericalangle AE'G$ ein rechter Winkel ist. Nun müssen wir nur noch die Faltnie $E'G$ weiter verlängern, indem wir entlang dieser bereits teilweise vorhandenen Linie falten (Bild 43d). Dadurch entsteht der Punkt F und $ABFE'$ ist ein Ostwaldsches Rechteck.

Variante 2: Nun nehmen wir an, dass die Punkte E' und F auf den beiden Senkrechten zu AB schon gefunden sind und damit $ABFE'$ ein Ostwaldsches Rechteck ist. Wir verbinden noch E mit E' und zeichnen das Lot von A auf EE' ein (Abb. Bild 44a).

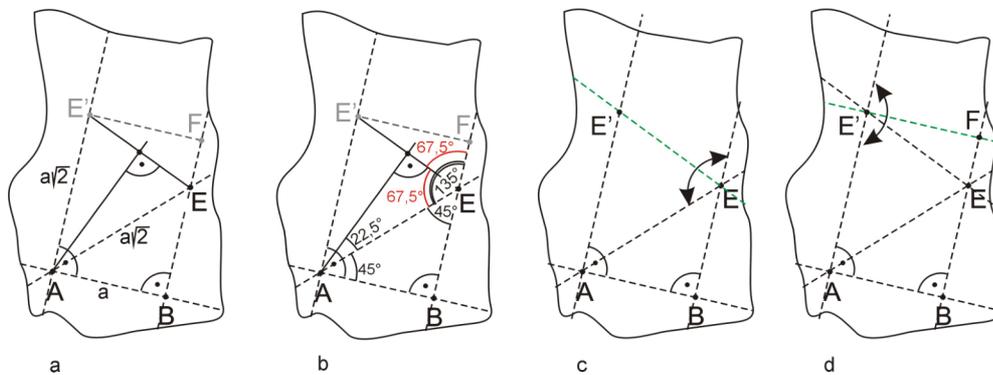


Bild 44

Dann ergeben sich die Winkelgrößen, die in Bild 44b eingetragen sind. Wir erkennen sofort, dass EE' die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle AEF$ ist und finden damit eine Faltmöglichkeit. Wir falten die Senkrechte auf AB durch B so auf EA , dass die Faltnie durch E geht (Bild 44c). Diese Faltnie schneidet die Senkrechte auf AB durch A im gesuchten Punkt E' . Nun müssen wir nur noch diese Senkrechte so auf sich falten, dass die Faltnie durch E' geht, womit wir den Punkt F finden (Bild 44d). $ABFE'$ ist dann das gesuchte Ostwaldsche Rechteck.

3.6 Ergänzendes zum DIN-A Format

In unserem täglichen Leben nutzen wir das DIN-A Format selbstverständlich z.B. in Form von Schreibblöcken, Schulheften oder Karteikarten. Was dieses Papierformat auszeichnet ist uns jedoch nicht immer bewusst.

Natürlich ist uns bekannt, dass beim Halbieren eines DIN-A4 Blattes parallel zur kurzen Blattkante zwei DIN-A5 Blätter entstehen, die zum Ausgangsblatt ähnlich sind. Dies ist auch eine der Bedingungen, die an unser DIN-A Papier gestellt werden. Wie am Anfang von Kapitel 3 gezeigt

wurde, ergibt sich daraus mit einer einfachen Ähnlichkeitsbetrachtung, dass sich die Seitenlängen eines DIN-A Blattes wie $1 : \sqrt{2}$ verhalten.

Die Größe unseres DIN-A4 Blattes wird durch eine zweite Bedingung eindeutig festgelegt: Der Flächeninhalt F_{A_0} des DIN-A0 Blattes beträgt $1m^2$.

Bezeichnen wir mit a_0 und b_0 die Seitenlängen des DIN-A0 Blattes, so folgt mit der zweiten Eigenschaft $a_0 \cdot b_0 = 1m^2$. Mit der ersten Eigenschaft ($b_0 = a_0\sqrt{2}$) ergibt sich daraus $a_0 \cdot a_0\sqrt{2} = 1m^2$, also $a_0^2 \cdot \sqrt{2} = 1m^2$, $a_0^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}m^2$ bzw. $a_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2}m} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{8} \approx 0,84089m$. Für b_0 erhalten wir dann $b_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}m = \sqrt{\sqrt{2}m} = \sqrt[4]{2}$, also $b_0 \approx 1,18920m$. Auf ganze Millimeter gerundet erhalten wir dann $a_0^* = 841mm$ und $b_0^* = 1189mm$.

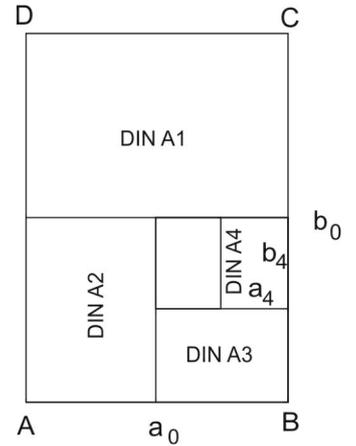


Bild 45: Einteilung von DIN-A0

Bedenken wir, dass unser DIN-A4 Blatt sich durch mehrfaches Halbieren eines DIN-A0 Blattes ergibt, so wie es in Bild 45 gezeigt ist, können wir feststellen, dass für die Seitenlängen a_4 und b_4 eines DIN-A4 Blattes $a_4 = \frac{1}{4}a_0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2}m} \approx 0,21022m$ und $b_4 = \frac{1}{4}b_0 = \frac{1}{4}\sqrt[4]{2}m \approx 0,29730m$ gilt. Auf ganze Millimeter gerundet erhalten wir $a_4^* = 210mm$ und $b_4^* = 297mm$. Dem Bild 45 entnehmen wir auch, dass 16 DIN-A4 Blätter in einem DIN-A0 Blatt enthalten sind. Folglich ist der Flächeninhalt eines DIN-A4 Blattes $F_{A_4} = \frac{1}{16}m^2 = 0,0625m^2$. Mit den auf Millimeter gerundeten Werten erhalten wir $F_{A_4}^* = a_4^* \cdot b_4^* = 6237mm^2 = 0,06237m^2$, also ebenfalls eine sehr gute Näherung.

Die folgende Tabelle, die auch von Schülern zusammengestellt werden kann, gibt eine Übersicht über die Blattgrößen von DIN-A0 bis DIN-A6.

DIN-	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6
a^* (in mm)	841	594	420	297	210	148	105
b^* (in mm)	1189	841	594	420	297	210	148
F (in m^2)	$1 = \frac{1}{2^0}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6}$

Natürlich kann man auch verschiedene rechteckige Alltagsgegenstände, z.B. Personalausweis, Fahrerlaubnis, Bankkarte, Krankenversicherungskarte, ..., vermessen und diese mit den Maßen des DIN-A Formates vergleichen.

An dieser Stelle wollen wir noch erwähnen, was es bedeutet, wenn wir beim normalen Druckerpapier von 80g-Papier sprechen. Diese Masseangabe von 80g bezieht sich auf $1m^2$, d.h., dass das zugehörige DIN-A0 Blatt aus dem selben Papier eine Masse von 80g hat. Da unser DIN-A4 Blatt ein sechzehntel des DIN-A0 Blattes ist, hat unser DIN-A4 Blatt eine Masse von genau 5g.

Zusammenfassend können wir sagen, dass das DIN-A Format durch die folgenden beiden Bedingungen festgelegt ist:

1. Beim Halbieren eines Blattes parallel zur kurzen Blattkante sollen zwei (gleichgroße) Blätter entstehen, die zum Ausgangsblatt ähnlich sind.
2. Der Flächeninhalt des Ausgangsblattes (DIN-A0) beträgt $1m^2$.

Der große Vorteil dieses Papierformates ist, dass sich beim Halbieren immer wieder zueinander ähnliche Blätter ergeben, ohne dass ein Papierverlust (Abfall) entsteht. Dies ist wohl auch ein Grund, warum sich dieses Format (fast) international durchgesetzt hat. In Deutschland wurde dieses Format 1922 in der DIN-Norm DIN 476 festgelegt. Entwickelt wurde dieser Standard vom deutschen Ingenieur, Mathematiker und Normentheoretiker WALTER PORSTMANN (1886 - 1959). WALTER PORSTMANN war von 1912 bis 1914 Assistent des Chemie-Nobelpreisträgers WILHELM OSTWALD (1853 - 1932). WILHELM OSTWALD war Vorsitzender der „Brücke – Internationales Institut für Organisation der geistigen Arbeit“ und propagierte Papiergrößen mit dem Seitenverhältnis $1 : \sqrt{2}$, welches er als Weltformat bezeichnete. Im Unterschied zu unserem DIN-A Format, basiert das Weltformat auf der Basis von $1cm$. Damit hatte das Ausgangsblatt eine Größe von $1cm \times 1,41cm$ [26]. Weitere Blätter ergeben sich durch Verdopplung.

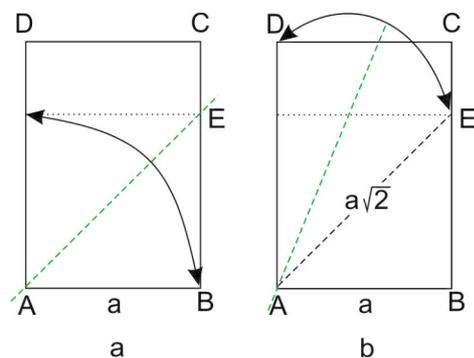


Bild 46: Überprüfung auf DIN-A Format

Die deutsche DIN 476 diente 1975 als Grundlage für die europäische bzw. internationale Norm EN ISO 216, welche in fast allen Ländern angewendet wird. Ausnahmen bilden USA, Kanada und Mexiko, in denen andere, weniger systematische Formate verwendet werden.

Hier muss natürlich auch noch angemerkt werden, dass die DIN 476 neben der DIN-A Reihe, die dort auch als Hauptformat erklärt wurde, weitere Nebenformatreihen B, C, D enthält. Diese ordnen sich in die A-Reihe ein. Alle Blätter der Nebenreihen haben ebenfalls das Seitenverhältnis $\sqrt{2}$, die Ausgangsrechtecke B0, C0 und D0 sind aber nicht $1m^2$ groß.

Erläuterungen dazu findet man auch in [17] und [37]. In [36] wird das Konzept des DIN-A Formates auch in den Raum übertragen.

Wie bereits erwähnt, bezeichnen auch wir, zu Ehren von Wilhelm Ostwald, Rechtecke mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ als Ostwaldsche Rechtecke. Ostwaldsche Rechtecke haben viele interessante Eigenschaften. Bedenken wir z.B., dass in einem Quadrat mit der Seitenlänge a jede Diagonale die Länge $a\sqrt{2}$ hat, so können wir bei einem Rechteck $ABCD$ leicht überprüfen, ob es sich um ein

Ostwaldsches Rechteck handelt. Dazu falten wir zuerst die Ecke B auf die Seite AD (Bild 46a), sodass die Faltkante durch A geht. Diese Faltkante schneidet BC in E . AE ist eine Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge $a = |AB|$. Nun falten wir D auf E (Bild 46b) und drücken die entstehende Faltkante fest an. Nur dann, wenn diese Faltkante durch A geht, ist $ABCD$ ein Ostwaldsches Rechteck.

Auch beim Würfel tritt ein Ostwaldsches Rechteck auf. Gehen wir nämlich von einem Würfel $ABCDEFGH$ (Bild 47) mit der Kantenlänge a aus, dann hat jede Flächendiagonale die Länge $a\sqrt{2}$. Folglich ist jedes Rechteck (z.B. $ACGE$), das aus einem Paar paralleler Würfelkanten gebildet wird, ein Ostwaldsches Rechteck.

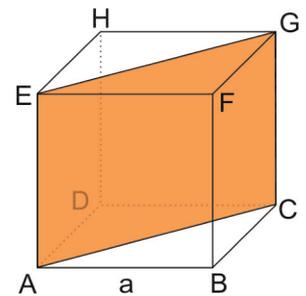


Bild 47: DIN-A Format im Würfel

Zum Abschluss soll natürlich nicht verschwiegen werden, dass bereits 1786 der Mathematiker, Physiker und Aphorismen-Dichter Georg Christoph Lichtenberg (1742 - 1799) auf das Papierformat mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ hingewiesen hat. Er schreibt an den deutschen Philosophen und Ökonomen Johann Beckmann (1739 - 1811):

„Ew. Wohlgebohren

kan ich nunmehr mit Zuverlässigkeit melden (denn weiß es aus dem Munde des HE. DeLuc selbst), daß London theils mit Basalt, theils mit Granit gepflastert ist. Ersterer kommt aus Schottland, letzterer aber aus den Insuln Jersey und Guernsey.

Können mir Ew. Wohlgebohren wohl nicht sagen, wo die Formen unserer Papiermacher gemacht werden, oder ob sie sie, woran ich zweifle, selbst machen? Die Veranlassung zu dieser Frage ist vielleicht Ew. Wohlgebohren nicht unangenehm. Ich gab einmal einem jungen Engländer, den ich in Algebra unterrichtete, die Aufgabe auf, einen Bogen Papier zu finden, bey dem alle Formate als forma patens, folio, 4to, 8, 16, einander ähnlich wären. Nach gefundenem Verhältniß wolte ich nun einem vorhandenen Bogen eines gewöhnlichen Schreib=Papiers mit der Scheere das verlangte Format geben, fand aber mit Vergnügen, daß er ihn würcklich schon hatte. Es ist nämlich das Papier worauf ich dieses Billet schreibe, dem ich aber, weil durch das beschneiden etwas von der eigentlichen Form verlohren gegangen seyn kan, noch einen unbeschnittenen beylege. Die kleine Seite des Rechtecks muß sich nämlich zu der großen verhalten wie $1 : \sqrt{2}$ oder wie die Seite des Quadrats zu seiner Diagonale.

Die Form hat etwas angenehmes und vorzügliches vor der gewöhnlichen. Sind den Papier=Formen machern wohl Regeln vorgeschrieben, oder ist diese Form durch Tradition nur ausgebreitet worden? und wo stammt diese Form die wohl nicht durch Zufall entstanden ist, her?

Ew. Wohlgebohren verzeyhen mit diese Freyheit.

[Göttingen,] den 25 Oct. 1786. GCLichtenberg“ [22]

Bereits während der Französischen Revolution (1789 bis 1799) wurde in Frankreich ein Papierformat

mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ festgelegt, verschwand aber wieder.

Interessant ist sicher auch, dass vor der Vereinheitlichung unseres Papierformates eine Vielzahl unterschiedlicher Formate in Gebrauch waren. Hier einige Beispiele:

Name:	Oktav	Quart	Folio	Brief
Größe (mm):	$142,5 \times 225$	225×285	210×330	270×420
Name:	Kanzlei, Doppelfolio	Propatria		
Größe (mm):	330×420	340×430		

und noch viele mehr, wie in [37] nachzulesen ist.

Ein schönes, für die Arbeit in der Schule gut geeignetes Arbeitsheft zu diesem Thema ist die MatheWelt [17]. Dort wird unter anderem auch ein amerikanisches Papierformat vorgestellt und man findet das Normenblatt der DIN 476 abgedruckt.

4 Das goldene Rechteck

Neben den ostwaldschen Rechtecken spielt auch das goldene Rechteck eine wichtige Rolle. Wir bezeichnen genau dann ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b als goldenes Rechteck, wenn die beiden Seitenlängen im Verhältnis des goldenen Schnittes zueinander stehen.

Ein Punkt T teilt eine Strecke AB (Bild 48) im goldenen Schnitt genau dann, wenn $\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}$ gilt. Verwenden wir die Bezeichnungen für die Streckenlängen aus Bild 48, so bedeutet dies $\frac{l}{a} = \frac{a}{l-a}$. Daraus ergibt sich $l^2 - al = a^2$.

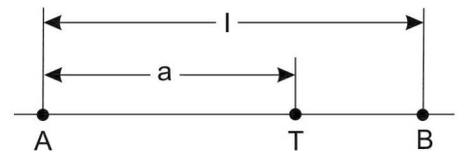


Bild 48

Diese Gleichung kann als quadratische Bestimmungsgleichung für l interpretiert werden. Wir erhalten $l^2 - al - a^2 = 0$, woraus sich $l_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} a$ ergibt. Bedenken wir, dass die Streckenlänge l positiv sein muss, dann ist $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a$ bzw. $\frac{l}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803... .$

Stellen wir die obige Gleichung $l^2 - al = a^2$ nach l^2 um und addieren auf beiden Seiten $(\frac{l}{2})^2$, so erhalten wir $l^2 + (\frac{l}{2})^2 = a^2 + al + (\frac{l}{2})^2$ bzw. $l^2 + (\frac{l}{2})^2 = (a + \frac{l}{2})^2$. Interpretieren wir diese Beziehung für ein Dreieck mit den Seitenlängen l , $\frac{l}{2}$ und $a + \frac{l}{2}$, so folgt aus der Umkehrung des Satzes des Pythagoras, dass dieses Dreieck rechtwinklig sein muss. Damit haben wir aber auch eine Konstruktion für einen Teilpunkt T , der die Strecke AB im goldenen Schnitt teilt, gefunden. Diese Konstruktion ist im Bild 49 dargestellt.

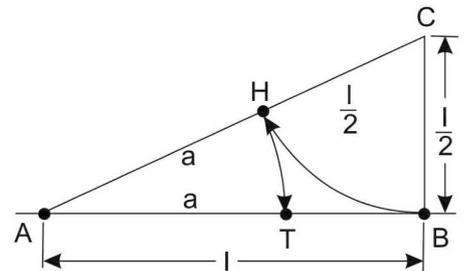


Bild 49

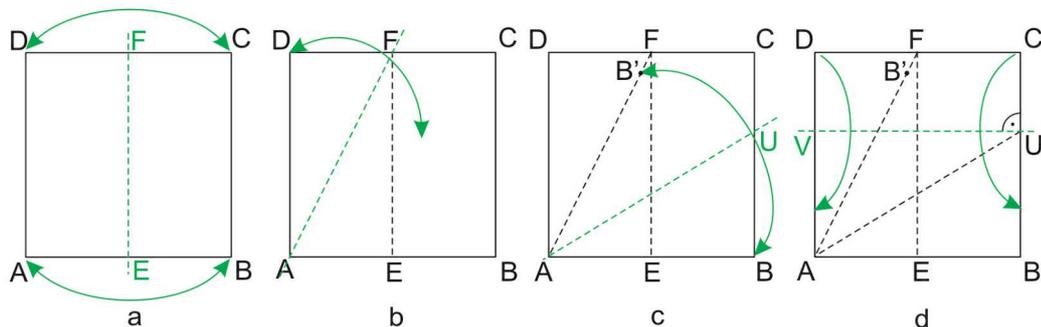


Bild 50: Faltfolge für das goldene Rechteck

Nun wenden wir uns wieder dem Papierfalten zu und falten ein goldenes Rechteck nach [20]. In diesem Rechteck entspricht das Verhältnis der langen zur kurzen Seite dem goldenen Schnitt. Um zu diesem goldenen Rechteck zu kommen, starten wir mit einem normalen Quadrat $ABCD$ (Bild 50a). Wir falten zuerst die Mittellinie zu AD , die wir mit EF bezeichnen. Anschließend falten wir

die Diagonale AF (Bild 50b). Nun wird B so auf AF gefaltet, dass die Faltlinie durch A geht (Bild 50c). Diese Faltlinie markiert auf BC den Punkt U . Falten wir nun noch die Senkrechte zu BC durch U , indem wir C von ‘hinten’ auf UB falten, so entsteht auf AD der Punkt V (Bild 50d). Das Rechteck $ABUV$ ist ein goldenes Rechteck.

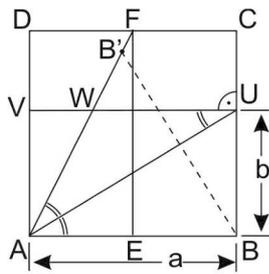


Bild 51

Zum Nachweis der obigen Behauptung setzen wir die Seitenlänge des Quadrates wieder mit a fest und bezeichnen $|BU| = |AV|$ mit b (Bild 51). Weil die beiden Dreiecke ADF und AVW ähnlich zueinander sind und $|DF| = \frac{1}{2}a$ ist, ist $|VW| = \frac{1}{2}b$. Mit dem Satz des Pythagoras folgt $|AW| = \sqrt{b^2 + (\frac{b}{2})^2} = \frac{b}{2}\sqrt{5}$. Wegen der Faltung von B nach B' auf AF ist $|\sphericalangle BAU| = |\sphericalangle UAF|$. Nun sind aber AB und VU parallel zueinander, woraus $|\sphericalangle BAU| = |\sphericalangle AUW|$ folgt. Damit ist aber das Dreieck AUW gleichschenkelig, da es zwei kongruente Basiswinkel hat. Folglich gilt $|UW| = |AW| = \frac{b}{2}\sqrt{5}$. Damit gilt $a = |VU| = |VW| + |WU| = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{5}$, also $a = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{5}$. Daraus ergibt sich $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und das Rechteck $ABUV$ ist ein goldenes Rechteck, wie behauptet.

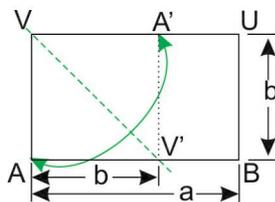


Bild 52

Falten wir nun noch in unserem goldenen Rechteck $ABUV$ die Ecke A so auf UV , dass die Faltlinie durch V geht und bezeichnen den Schnittpunkt dieser Faltlinie mit AB mit V' , so ist $|AV| = |AV'|$. Damit ist aber $\frac{|AB|}{|AV'|} = \frac{a}{b}$ und folglich teilt V' die Strecke AB im goldenen Schnitt. Damit haben wir auch eine Faltkonstruktion für das Teilen einer Strecke im goldenen Schnitt gefunden (Bild 52).

Bedenken wir, dass $\frac{|AB|}{|AV'|} = \frac{|AV'|}{|V'B|} = \frac{|A'V'|}{|V'B|}$ ist, so können wir feststellen, dass das Rechteck $A'V'BU$ ebenfalls ein goldenes Rechteck ist. Weil $AV'A'V$ ein Quadrat ist, haben wir eine Eigenschaft des goldenen Rechtecks entdeckt: Schneidet man von einem goldenen Rechteck ein größtmögliches Quadrat ab, so ist das Restrechteck ein goldenes Rechteck.

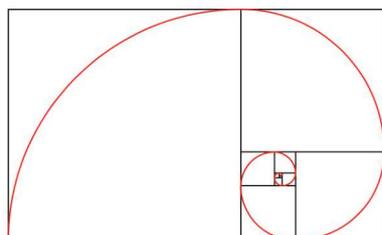


Bild 53: goldene Spirale

Wiederholen wir diese Abschneiden eines Quadrates sukzessive (Bild 53) und zeichnen in jedes Quadrat einen Viertelkreis entsprechend ein, so erhalten wir die goldene Spirale.

Mehr zum goldenen Schnitt findet man z.B. in [35].

5 Ein (fast) regelmäßiges Fünfeck

Auf der *Internationalen Tagung zur Didaktik des Papierfaltens* in Freiburg im Breisgau stellte Frau Carmen Sprung 2010 eine Faltkonstruktion für ein Fünfeck vor. Die Faltanleitung ist der Bild 54 zu entnehmen.

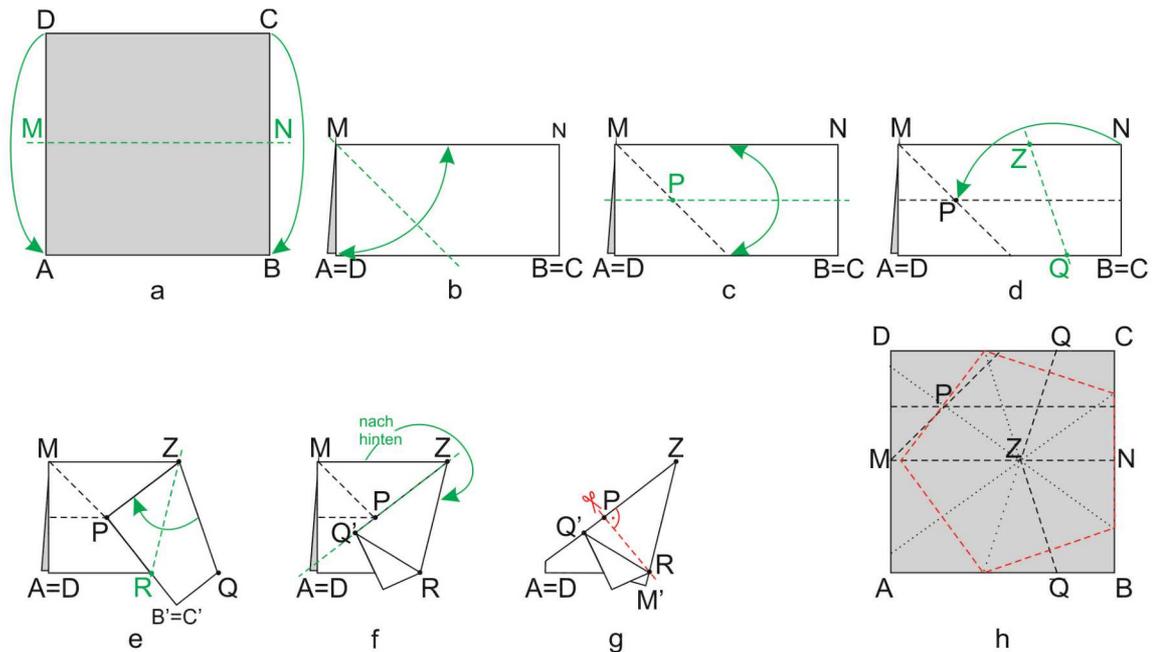


Bild 54: Der Faltprozess für das Fünfeck von Carmen Sprung

Wir beginnen mit einem quadratischem Faltpapier $ABCD$ und falten die obere Hälfte direkt auf die untere. MN ist die zugehörige Faltpunktlinie. Anschließend wird die umgefaltete Ecke D der oberen Schicht so auf MN gefaltet, dass die Faltpunktlinie durch M geht (Bild 54b). Das umgefaltete Dreieck wird wieder zurück gefaltet. Dann wird das oben liegende Rechteck $DCNM$ parallel zu DC halbiert. Die zugehörige Faltpunktlinie schneidet die vorhergehende Faltpunktlinie im Punkt P (Bild 54c). Nun falten wir N auf P , wobei die Faltpunktlinie QZ entsteht (Bild 54d). Da diese Faltpunktlinie später noch einmal betrachtet wird, soll hier schon darauf hingewiesen werden, dass QZ die Mittelsenkrechte von NP ist.

Wir falten ZQ auf ZP . Dabei geht die Faltpunktlinie durch Z und markiert am unteren Rand den Punkt R (Bild 54e). Nun wird noch ZM auf ZR entlang ZO nach hinten umgefaltet (Bild 54f). Dann liegen bei Z zehn Schichten Papier aufeinander, die gut übereinander zu passen scheinen. Folglich müsste der Winkel $\sphericalangle PZR$ bei Z die Größe 36° haben.

Abschließend schneiden wir durch P senkrecht zu ZP die Papierlagen durch und erhalten nach dem Entfalten ein sehr regelmäßig aussehendes Fünfeck mit dem Mittelpunkt Z . Für Bild 54f wurde die

Figur nicht zerschnitten, sondern nur entlang der Schnittlinie umgefaltet. Dadurch erkennt man nach dem Entfalten das Fünfeck gut im Ausgangsquadrat.

Nun müssen wir prüfen, ob das gefaltete Fünfeck regelmäßig ist. Dazu können wir z.B. den Winkel $\sphericalangle MZQ$ (Bild 54e) berechnen. Falls das Fünfeck regelmäßig ist, müsste dieser Winkel die Größe $3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$ haben. Zur Berechnung legen wir das entfaltete Quadrat in ein Koordinatensystem, so wie es in Bild 55 gezeigt ist. Wir gehen davon aus, dass die Kantenlänge des Quadrates 4 ist.

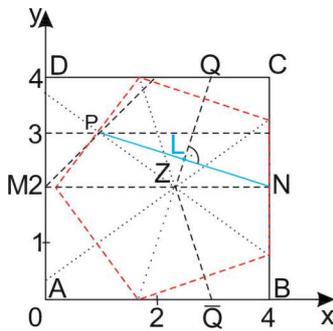


Bild 55

Wir berechnen die Größe des Winkels $\sphericalangle QZN$ und erhalten daraus die gesuchte Winkelgröße. Um die Größe des Winkels $\sphericalangle QZN$ zu berechnen, bestimmen wir zuerst die Koordinaten der beiden Punkte Z und Q .

Aufgrund der Faltkonstruktion sind von P und N die Koordinaten bekannt: $P(1; 3)$ und $N(4; 2)$. Dann hat die Gerade durch P und N den Anstieg $m_{PN} = -\frac{1}{3}$. Weil ZQ die Mittelsenkrechte von PN ist, geht die Gerade durch Z und Q auch durch den Mittelpunkt L von PN und steht auf dieser Strecke senkrecht. Folglich gilt für den Anstieg dieser Geraden $m_{ZQ} = -\frac{1}{m_{PN}} = 3$. Da L die Koordinaten $L(\frac{5}{2}; \frac{5}{2})$ hat, ergibt sich $y = 3x - 5$ für die Gleichung der Geraden durch Z und Q .

Weil die y -Koordinaten von Z und Q bekannt sind ($y_Z = 2$ und $y_Q = 4$), ergeben sich mit der Gleichung $y = 3x - 5$ die zugehörigen x -Koordinaten: $x_Z = \frac{7}{3}$ und $x_Q = 3$. Damit berechnen wir nun $\tan \sphericalangle QZN = \frac{y_Q - y_Z}{x_Q - x_Z} = \frac{2}{3 - \frac{7}{3}} = 3$. Daraus ergibt sich $|\sphericalangle QZN| \approx 71,565^\circ$ und folglich $|\sphericalangle MZQ| = 180^\circ - |\sphericalangle QZN| \approx 108,435^\circ$. Damit führt die Faltkonstruktion nicht zu einem regelmäßigem Fünfeck. Aber, aufgrund der geringen Abweichung vom gewünschten Wert 108° , fällt dies bei der praktischen Ausführung der Faltung nicht auf.

6 Vom Grashalm zum achteckigen Stern

In diesem Kapitel lernen wir nach [20] eine Figur zu falten, die im Origami als *Gras* bekannte ist. Das fertige Ergebnis ist im Bild 56 aus zwei Richtungen zu sehen. Dabei ergeben sich auch zahlreiche elementargeometrische Fragen, die hier im Zentrum dieser Betrachtungen stehen sollen.

Wir beginnen mit einem quadratischen Faltpapier $ABCD$, wie es im Bild 57a zu sehen ist und falten es entlang der Diagonalen AC und wieder auseinander.

Nun werden die Kanten CD und CB an die gefaltete Diagonale herangefaltet (Bild 57b). Dabei gehen D nach D' und B nach B' . Beide Bildpunkte fallen zusammen. Außerdem bestimmen die Faltnlinien die Punkte E und F auf AD bzw. AB . Das entstandene Viereck $AFCE$ ist ein Drachenviereck. Dies ergibt sich aus der Kongruenz der beiden Dreiecke AFC und ACE nach (*ws*), da $|\sphericalangle FCA| = |\sphericalangle ACE| = 22,5^\circ$ und $|\sphericalangle FAC| = |\sphericalangle CAE| = 45^\circ$ und AC in beiden Dreiecken liegt. Folglich muss $|EC| = |FC|$ und $|EA| = |FA|$ sein. Damit ist $AFCE$ tatsächlich ein Drachenviereck.

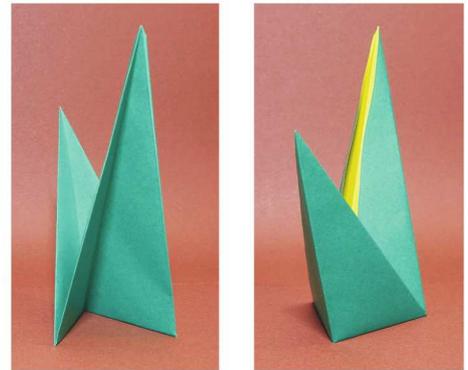


Bild 56: Gras

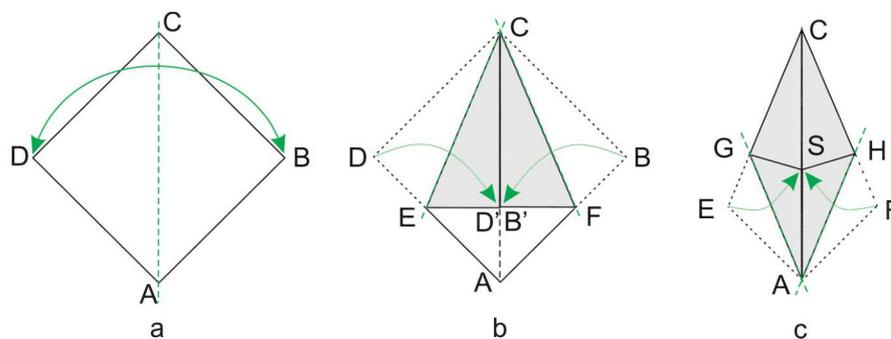


Bild 57: Faltfolge für den Grashalm

Als nächstes falten wir die Kanten AE und AF an die Diagonale AC heran (Bild 57c). Die Bilder von E und F fallen auf AC in einem Punkt zusammen, den wir mit S bezeichnen. Die Faltnlinien bestimmen zwei Punkte G und H auf CE bzw. CF . Das Viereck $AHCG$ ist ein Rhombus. Auch hier können wir mit der Kongruenz der beiden Dreiecke AHC und ACG nach (*ws*) argumentieren. In diesen beiden Dreiecken ist nämlich zusätzlich $|\sphericalangle HAC| = |\sphericalangle CAG| = 22,5^\circ$, woraus insgesamt $|HC| = |GC|$ und $|HA| = |GA|$ folgt. Da die beiden betrachteten Dreiecke auch gleichschenkelig sind, die Innenwinkel an der Seite AC haben die Größe $22,5^\circ$, ergibt sich, dass alle vier Seiten des Vierecks $AHCG$ gleichlang sind. Folglich ist dieses Viereck ein Rhombus.

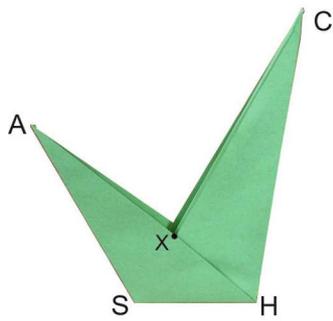


Bild 58

Um nun aus dem flachen Rhombus das *Origami-Gras* eine räumliche Figur zu erhalten, wird der Rhombus entlang GS und HS , aber nur auf der Länge dieser Kanten, jeweils nach oben und dann wieder zurück gefaltet. Zum Abschluss wird die Kante CS entgegen ihrer Faltrichtung gefaltet. Dabei bewegt sich das ganze Gebilde, sodass die im Foto (Bild 58) gezeigte Figur entsteht. Diese Figur heißt im Origami *Gras*.

Falten wir zwei solche Figuren aus gleich großen Ausgangsquadraten, so können wir durch Übereinanderlegen leicht sehen, dass das außen liegende Dreieck SHA kongruent zu dem aus der Figur herausragenden Teil XHC ist (Bild 58). In den Bildern 59a und b wird das Übereinanderlegen gezeigt. Diese Kongruenz soll im Folgenden begründet werden.

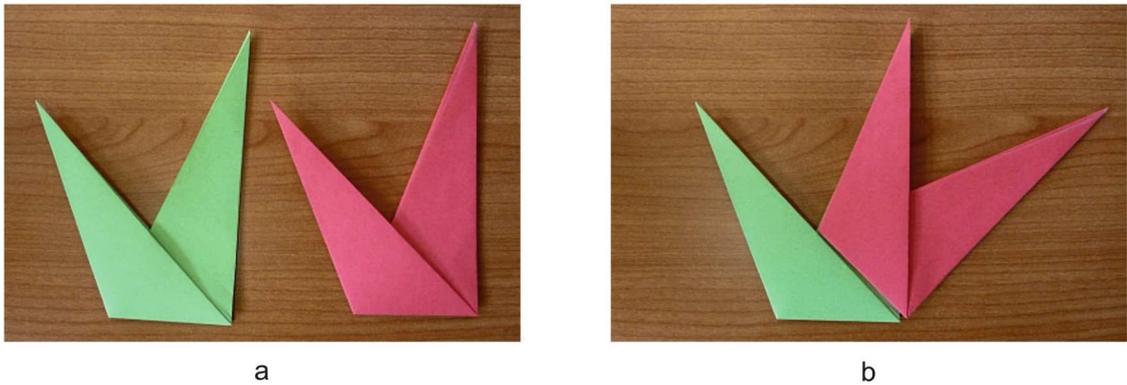


Bild 59: Überprüfung der Kongruenz

Weil die Ausgangsfigur ein Rhombus war, ist in den beiden betrachteten Dreiecken $|HA| = |HC|$. Diese beiden Seiten werden rot markiert. Außerdem gilt $|\sphericalangle SAH| = |\sphericalangle XCH| = 22,5^\circ$.

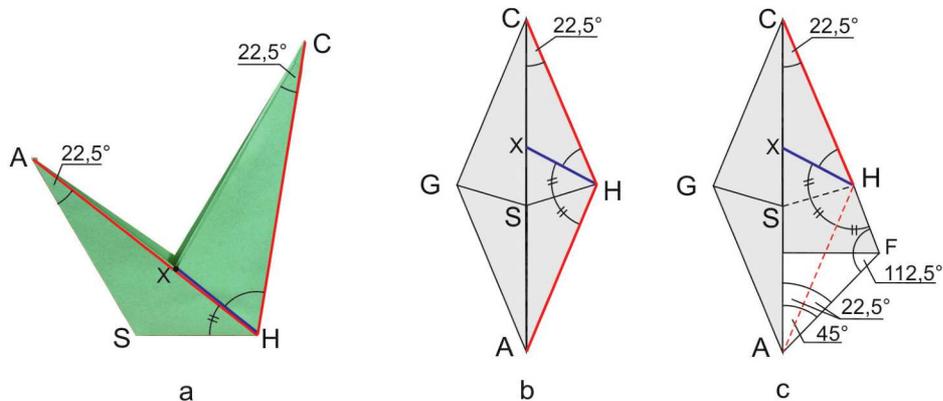


Bild 60: Zum Beweis der Kongruenz

Wir zeigen nun noch, dass $|\sphericalangle SHA| = |\sphericalangle XHC| = 45^\circ$ ist. Dazu wird die Strecke HX auf dem Dreieck XHC (blau) markiert. Auch die Winkel, deren Größen untersucht werden sollen, werden markiert (Bild 60a). Nun wird die Figur wieder zum Rhombus auseinandergefaltet (Bild 60b). Dabei ist klar, dass $|\sphericalangle AHS| = |\sphericalangle SHX|$ gilt, weil diese beiden Winkel in der gefalteten Figur übereinander gelegen haben.

Nun falten wir die bei S liegende Ecke entlang der Faltnlinie AH ebenfalls wieder auf (Bild 60c). Dann ist der Winkel $\sphericalangle FHA$ kongruent zu den beiden anderen Winkeln in H . Außerdem ist $|\sphericalangle CAF| = 45^\circ$. Damit ergibt sich aber im Dreieck AFC , dass $|\sphericalangle AFC| = 112,5^\circ$ gilt. Folglich ist auch $|\sphericalangle HSA| = 112,5^\circ$ und damit ergibt sich im Dreieck AHS , dass $|\sphericalangle AHS| = 45^\circ$ ist. Also liegen in H drei Winkel der Größe 45° und folglich muss der vierte Winkel $\sphericalangle XHC$ ebenfalls die Größe 45° haben. Damit ist aber die Kongruenz der beiden Dreiecke SHA und XHC nachgewiesen.



Bild 61: Tulpe

Unseren Grashalm können wir durch eine Blüte (vgl. [24]) so ergänzen, dass wir eine Tulpe bekommen (Bild 61). Diese falten wir nach der Anleitung, die im Bild 62 gezeigt ist. Dazu benutzen wir wieder ein quadratisches Faltpapier. Dieses Quadrat sollte eine Kantenlänge haben, die etwa $\frac{2}{3}$ der Kantenlänge des Quadrates für den Grashalm beträgt.

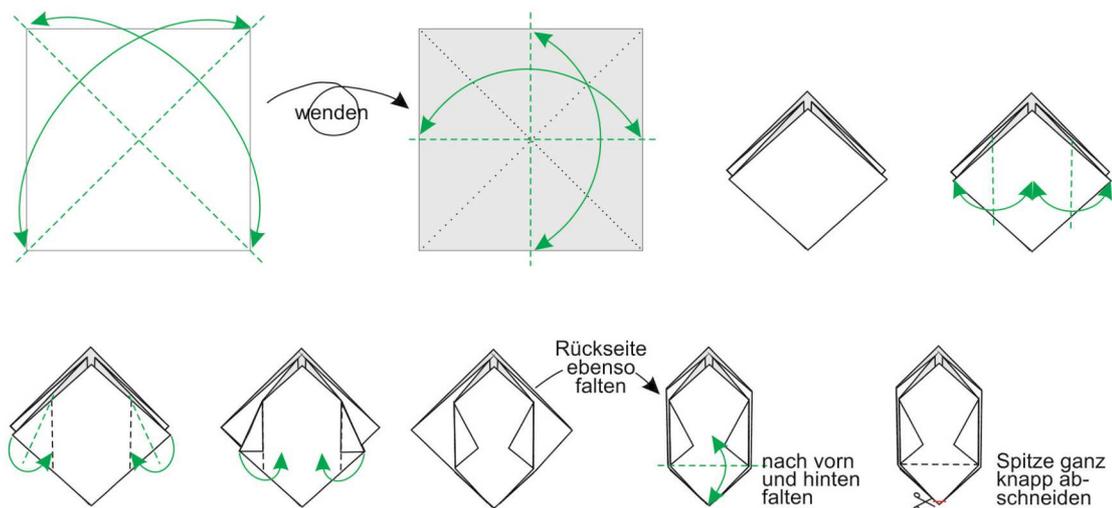


Bild 62: Faltfolge für die Tulpe

Eine kleine Modifikation des Grashalms lässt einen Vogel entstehen (Bild 63d). Dazu falten wir den längeren Teil des Grashalms etwas schräg zur äußeren Kante in beide Richtungen hin und zurück (Bild 63a). Nun drücken wir, entlang des eben gefalteten Knickes, die obere Spitze zwischen

die beiden Schichten des Grashalmes. Es entsteht der Schnabel des Vogel (Bilder 63b und c), nur die Augen müssen noch aufgemalt werden.

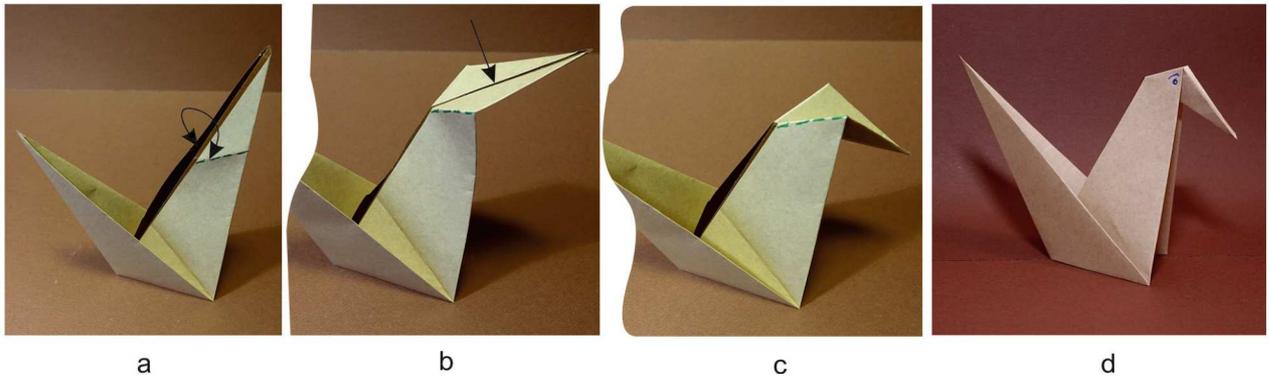


Bild 63: Vom Grashalm zum Vogel

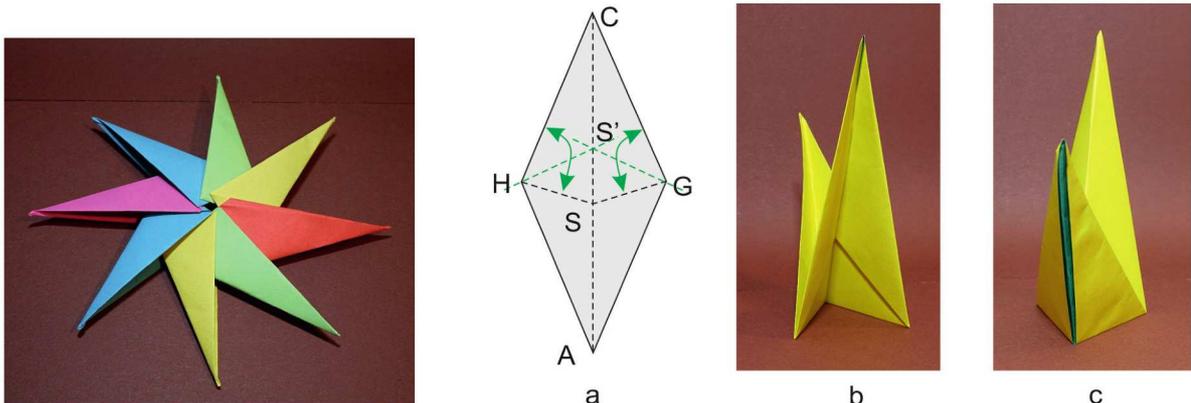


Bild 64: Stern

Bild 65: Modul für Stern

Nun beachten wir, dass die beiden Winkel $|\sphericalangle SHA|$ und $|\sphericalangle CHX|$ (vgl. Bild 60a) jeweils die Größe 45° haben. Weil 45 ein Teiler von 360 ist, lassen sich acht Grashalme, ohne Lücke, um die Ecke H anordnen. Damit das Ganze auch einen Stern (vgl. Bild 64, vgl. [24]) ergibt, der zusammenhält, werden acht Grashalme benötigt, die wie folgt verändert werden: Jeder der acht Grashalme wird wieder zum Rhombus aufgefaltet und so auf den Tisch gelegt, dass die geschlossene Fläche oben liegt. Dann sind die gefaltete Diagonale AC sowie die beiden Faltnen HS und GS zu erkennen (Bild 65a). Nun falten wir HC auf HS und GC auf GS , aber jeweils nur bis zur Diagonalen AC . Auf dieser Diagonalen entsteht der Schnittpunkt S' dieser Faltnen. Nun wird die Figur wieder zum Grashalm zusammengefaltet, diesmal aber entlang der neuen Faltnen HS und GS .

In den Bildern 65b und c ist der fertig gefaltete Grashalm aus zwei unterschiedlichen Ansichten zu sehen.

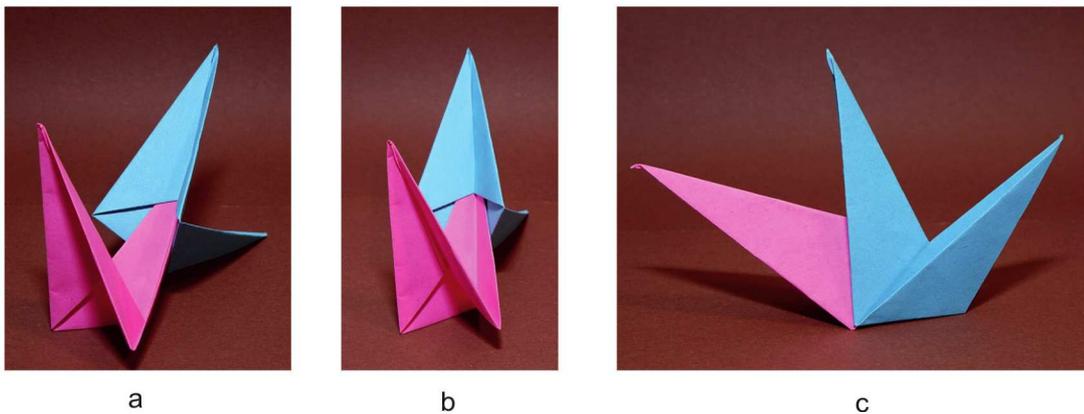


Bild 66: Zusammenfügen von zwei Modulen

Im Unterschied zu dem am Anfang gefalteten Grashalm hat der neue Grashalm an dem innen liegenden Dreieck zwei Laschen. Unter diese Laschen lässt sich das außen liegende Dreieck eines weiteren Grashalmes schieben, so wie es in den Bildern 66a - c gezeigt ist.

Wegen der vorher nachgewiesenen Kongruenz der beiden Dreiecke passt das eingeschobene Dreieck genau unter die beiden Laschen.

Nun werden weitere sechs neue Grashalme der Reihe nach eingearbeitet und abschließend der achte mit dem ersten ebenso verbunden. Diese letzte Verbindung ist nicht ganz so einfach herzustellen. Als Ergebnis erhalten wir aber einen schönen achteckigen Stern, so wie er im Bild 64 zu sehen ist.

7 Halbieren eines Quadrates

Beim Falten von Papier verwenden wir oft quadratisches Faltpapier. Wir beginnen manchmal mit dem Falten von einer Ecke des Quadrates auf eine diagonal gegenüberliegende Ecke, wobei die zugehörige Faltlinie die andere Diagonale des Quadrates ist.

Oder wir falten eine Ecke des Quadrates auf eine Ecke, die dieser nicht diagonal gegenüber liegt. Dann ist die zugehörige Faltlinie die Mittelsenkrechte der Quadratseite, die diese beiden Eckpunkte verbindet. Diese Mittelsenkrechte ist auch gleichzeitig eine Mittelparallele des Quadrates.

Gelegentlich bestimmen wir auch erst den Mittelpunkt des Quadrates, indem wir z. B. beide Diagonalen falten. Dann falten wir die vier Quadratecken auf diesen Mittelpunkt.

Im ersten Fall entsteht ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck, im zweiten ein Rechteck und im dritten wieder ein Quadrat. Auch wenn diese drei Figuren unterschiedlich sind, haben sie eine Gemeinsamkeit: Jede der drei Figuren ist mit zwei Schichten Papier bedeckt. Daher ist der Flächeninhalt jeder dieser Figuren gleich dem halben Flächeninhalt des Ausgangsquadrates.

Solchen Flächenhalbierungen für Quadrate wurden bereits in [19] (S. 24) kurz angesprochen. In [20] wird dabei auch Schneiden zugelassen.

Hier werden wir uns ausführlicher mit dem Halbieren des Flächeninhaltes eines Quadrates beschäftigen. Neben geometrischen Betrachtungen eignet sich dieses Thema auch gut zum Problemlösen und zur mathematischen Modellierung (lineare und quadratische Gleichungen spielen dann eine Rolle), wobei auch Begründen und Beweisen nicht zu kurz kommt.

7.1 Quadrathalbierung längs einer Mittellinie

Falten wir zuerst in einem Quadrat $ABCD$ zwei Ecken (z.B. B und C) mit einer gemeinsamen Kante auf die zugehörigen gegenüberliegenden Ecken (A und D) (Bild 67), so liegen zwei Papierschichten direkt übereinander. Das bedeutet aber, dass der Flächeninhalt des Quadrates halbiert wurde. Bezeichnen wir mit E und F die Schnittpunkte der Faltlinie mit den Quadratkanten AB und CD , so sind diese beiden Punkte die Mittelpunkte dieser Strecken, da auch hier entsprechende Streckenabschnitte beim Falten übereinander liegen. Auch eine Winkelhalbierung können wir beobachten: Die Punkte E und F sind Scheitelpunkte jeweils eines gestreckten Winkels. Beim Falten werden diese beiden Winkel halbiert. Auch hier liegen nach dem Falten die Schenkel der Teilwinkel direkt übereinander, sodass die Teilwinkel kon-

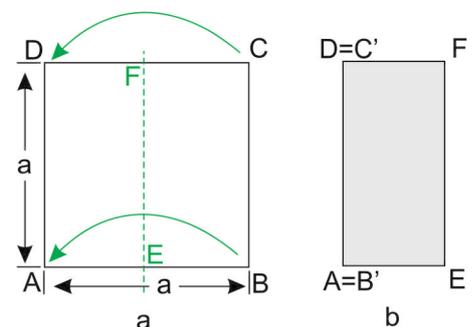


Bild 67

liegen nach dem Falten die Schenkel der Teilwinkel direkt übereinander, sodass die Teilwinkel kon-

gruent zueinander sind und damit auch die gleiche Größe haben. Da die Winkel vor dem Falten gestreckte Winkel waren, sind es nach dem Falten rechte Winkel. Damit ist $AEFD$ ein Rechteck. Ist a die Länge der Seiten des Quadrates $ABCD$, so hat das Rechteck $AEFD$ die Seitenlängen a und $\frac{a}{2}$. Auch rechnerisch ergibt sich für das Quadrat $ABCD$ der Flächeninhalt $F_Q = a^2$ und für das Rechteck $AEFD$ der Flächeninhalt $F_R = a \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2}a^2$, also $F_R = \frac{1}{2}F_Q$.

7.2 Quadrathalbierung parallel zu einer Mittellinie

Falten wir ein neues Quadrat $ABCD$. Wir falten jetzt A auf einen beliebigen Punkt A' von AB (Bild 68). Dabei geht D in den Punkt D' auf CD über. E und F bezeichnen die Schnittpunkte der Faltlinie mit den Quadratkanten. Natürlich ist EF senkrecht auf AB bzw. CD und nach dem Falten sind bei E und F rechte Winkel. Nun falten wir B auf A' , wobei C nach D' geht und G und H die Schnittpunkte der Faltlinie mit den Quadratkanten bezeichnen. Auch bei G und H bilden sich rechte Winkel, womit $EGHF$ ein Rechteck ist. In diesem Rechteck liegen wieder zwei Schichten Papier direkt übereinander, es hat also den halben Flächeninhalt des Ausgangsquares. Ist a wieder die Länge der Quadratkanten, dann ist $|EF| = a$ und folglich muss $|EG| = \frac{1}{2}a$ sein. Das ist aber auch schon aufgrund der Faltung klar, denn über EG liegt diese Strecke doppelt, einmal die Strecke selbst und dann die beiden Teilstrecken EA' und GA' , die jeweils zu AE und BG kongruent sind und AE , EG und GB ergeben zusammen AB .

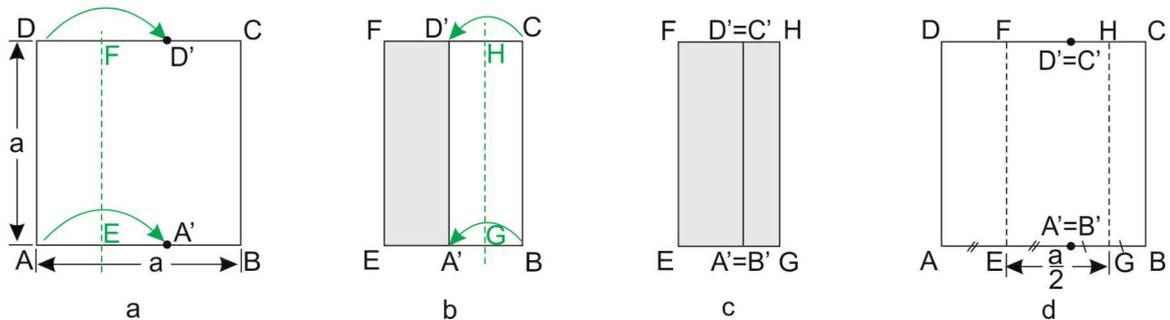


Bild 68

7.3 Quadrathalbierung zu einer Mittellinie

Wir beginnen wieder damit, dass wir in unser quadratisches Faltpapier $ABCD$ mit der Seitenlänge a eine zu BC parallele Mittellinie falten. Dadurch entstehen zwei Rechtecke $AEFD$ und $EBCF$ in die wir jeweils eine Diagonale falten. Dazu haben wir im Wesentlichen zwei verschiedene Möglichkeiten: Die beiden Diagonalen treffen sich z.B. in F oder sie sind parallel zueinander. Diese beiden Varianten untersuchen wir getrennt.

Variante 1: Wir falten D an der Diagonalen AF und C an der Diagonalen BF um (Bild 69b, c). Zum Abschluss falten wir noch das kleine überstehende Dreieck an AF zurück (Bild 69d, e). Dann erhalten wir ein gleichschenkliges Dreieck ABF , das wegen $|ABF| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |EF| = \frac{1}{2}a^2$ den halben Flächeninhalt im Vergleich zum Flächeninhalt des Ausgangsquadrates hat. Weil im Dreieck ABF Teile nur einfach mit Papier bedeckt sind, andere aber zwei- bzw. dreifach bedeckt sind, können wir die Flächenhalbierung nicht sofort erkennen.

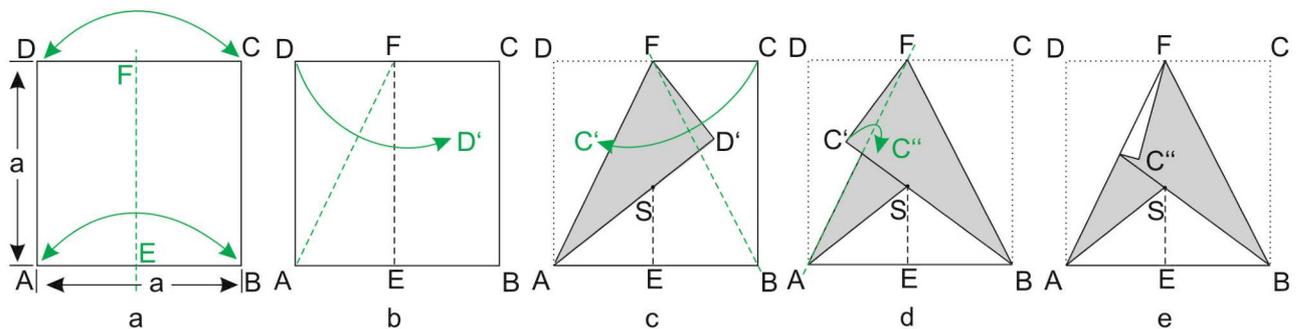


Bild 69

Falten wir aber, ausgehend von Bild 69c D' an SF um, so erhalten wir das Dreieck SFD^* (Bild 70b). Wir erkennen, dass die beiden Dreiecke AES und SFD^* kongruent zueinander sind. Beide Dreiecke sind nämlich rechtwinklig, es gilt $|FD^*| = |FD'| = |FD| = \frac{1}{2}a$ und $|\sphericalangle ASE| = |\sphericalangle D'SF| = |\sphericalangle FSD^*|$.

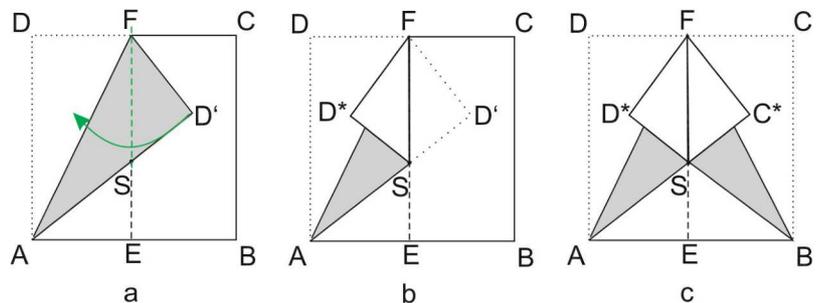


Bild 70

In analoger Weise können wir mit

C' aus Bild 69d verfahren, was den Punkt C^* (Bild 70c) und die Kongruenz der beiden Dreiecke SEB und SC^*F liefert.

Würden wir die beiden Dreiecke SD^*F und SC^*F abschneiden, dann könnten wir damit die beiden Dreiecke AES und BES bedecken und folglich wäre das Dreieck ABF mit zwei Papierschichten bedeckt. Auf diese Weise können wir auch die Flächenhalbierung erkennen.

An Stelle die Mittellinie EF im Quadrat $ABCD$ zu falten, können wir auch eine beliebige Senkrechte EF zu AB falten, so wie es im Bild 71a gezeigt ist.

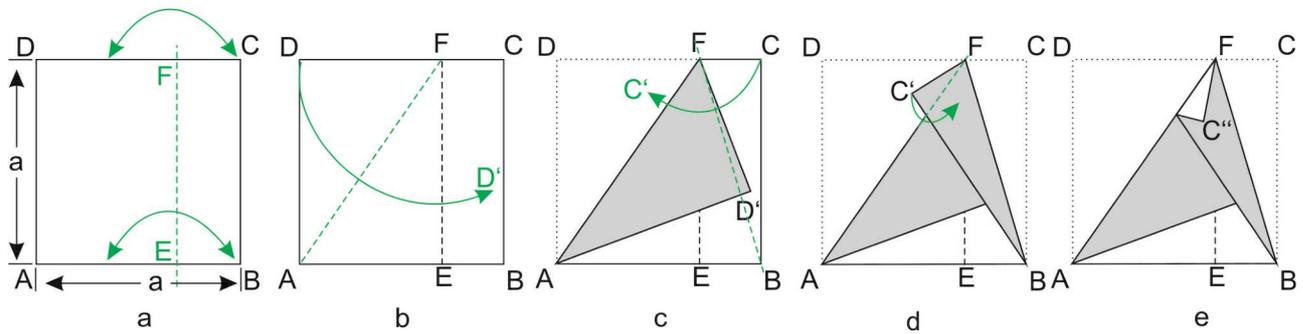


Bild 71

Dadurch entstehen wieder zwei Rechtecke $AEFD$ und $EBCF$ in die wir die beiden Diagonalen AF und CF falten (Bild 71b - e) und wie oben verfahren. Dadurch entsteht ein allgemeines Dreieck ABF , dessen Flächeninhalt wegen $|ABF| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |EF| = \frac{1}{2}a^2$ halb so groß ist wie der des Ausgangsquadrates.

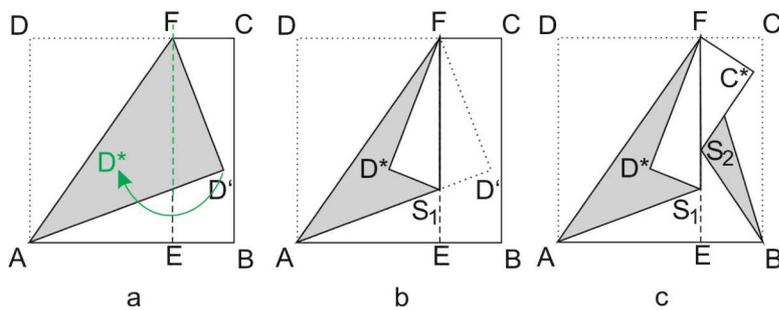


Bild 72

Ebenso wie oben können wir die Halbierung des Flächeninhaltes ohne Rechnung erkennen, wenn wir D' bzw. C' an EF umfalten (Bild 72). Die dabei entstehenden Dreiecke D^*S_1F bzw. C^*FS_2 sind dann kongruent zu den Dreiecken ES_1A bzw. EBS_2 . Würden wir wieder die beiden Dreiecke D^*S_1F bzw. C^*FS_2 abschneiden und auf die Dreiecke

ES_1A bzw. EBS_2 auflegen, dann wäre das Dreieck ABF mit zwei Papierschichten bedeckt, woraus sich die Flächenhalbierung ergibt.

Variante 2: Wir falten D an der Diagonalen AF und B an der Diagonalen EC um (Bild 73b, c).

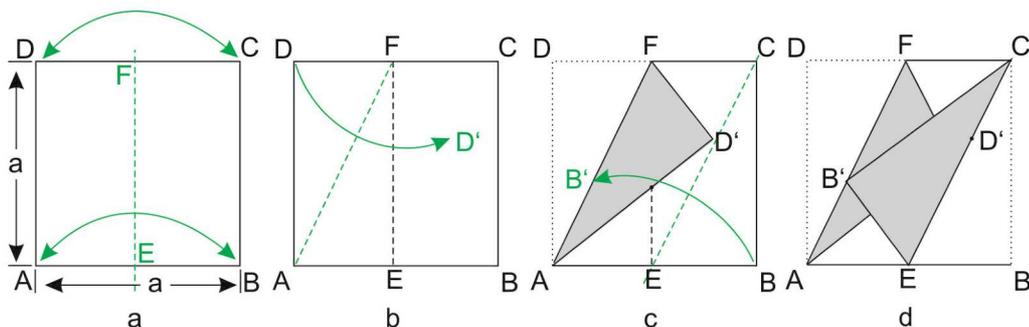


Bild 73

Dann entsteht ein Parallelogramm $AECF$, für dessen Flächeninhalt $|AECF| = |AE| \cdot |EF| = \frac{a}{2}a = \frac{1}{2}a^2$ gilt. Damit ist der Flächeninhalt dieses Parallelogramms halb so groß wie der des Ausgangs-
quadrates. Folglich haben wir wieder eine Flächenhalbierung gefunden.

Bei dem Faltvorgang (vgl. Bild 73c) fällt auf, dass D' scheinbar auf EC zu liegen kommt. Dies wollen wir jetzt überprüfen. Dazu legen wir die Figur in ein Koordinatensystem (vgl. Bild 74) und bestimmen die Koordinaten von D' , wobei D' das Bild von D bei der Spiegelung an AF ist.

Zuerst bestimmen wir die Gleichung der Geraden durch A und F .

Es ist $g(AF)$: $y = 2x$.

Als nächstes wird die Gleichung des Lotes von D auf AF bestimmt. L ist der zugehörige Lotfußpunkt.

Es ist $g(DL)$: $y = -\frac{1}{2}x + a$.

Weil die Koordinaten x_L und y_L von L die beiden Geradengleichungen erfüllen müssen, gilt $-\frac{1}{2}x_L + a = 2x_L$, also $x_L = \frac{2}{5}a$. Daraus ergibt sich sofort $y_L = \frac{4}{5}a$.

Mit diesen Werten und dem Strahlensatz (Zentrum D) erhalten wir $x_{D'} = \frac{4}{5}a$ und $y_{D'} = \frac{3}{5}a$, die Koordinaten von D' .

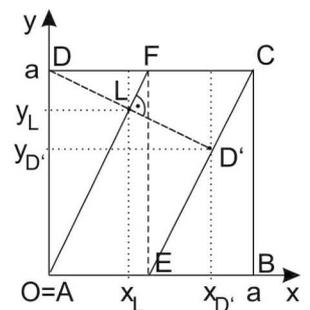


Bild 74

Nun müssen wir noch überprüfen, ob D' auf der Geraden $g(EC)$ durch E und C liegt. Setzen wir dazu in $G(EC)$: $y = 2x - a$ für x den Wert von $x_{D'}$ ein, so erhalten wir $y = 2 \cdot \frac{4}{5}a - a = \frac{3}{5}a = y_{D'}$. Damit liegt aber D' auf EC , wie vermutet. Natürlich liegt dann auch B' auf AF und $AECF$ ist ein Parallelogramm, bei dem keine zusätzlichen Ecken überstehen.

Aus unserer Berechnung erkennen wir aber noch etwas. Weil der Punkt L vom oberen Rand des Quadrates $\frac{1}{5}$ von der Seitenlänge des Quadrates entfernt ist, haben wir hier eine Möglichkeit gefunden die Seite eines Quadrates in fünf gleiche Teile einzuteilen.

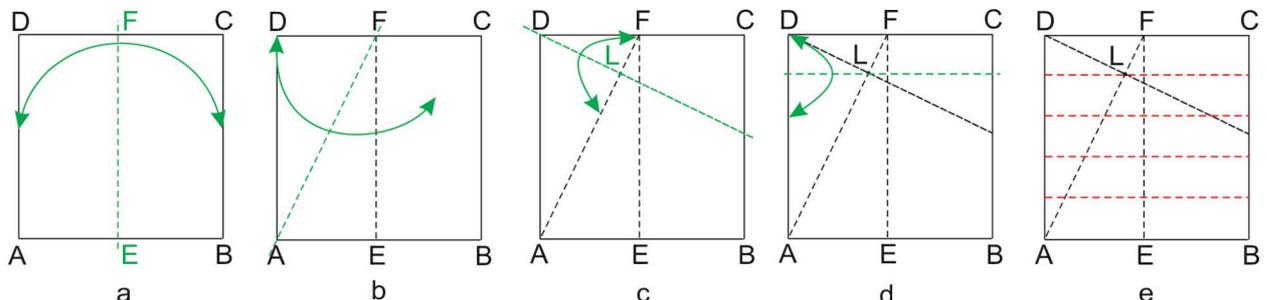


Bild 75: Fünfteilung von AD

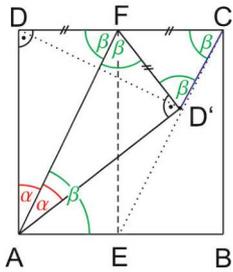


Bild 76

Im Bild 75 ist das Fünfteln von AD gezeigt. Der letzte Schritt von Bild 75d zu e kann z.B. durch eine „Ziehharmonikafaltung“ realisiert werden.

Weil L auch $\frac{2}{5}$ der Länge der Quadratseite vom linken Rand des Quadrates entfernt liegt, können wir in analoger Weise auch AB fünfteln.

Dass D' auf EC liegt, lässt sich auch ohne die obige Rechnung nachweisen. Dazu verbinden wir D' mit C , wie es im Bild 76 gezeigt ist. Weiterhin bezeichnen wir den Winkel $\sphericalangle FAD$ mit α und den Winkel $\sphericalangle DFA$ mit β . Dann ist $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Weil die beiden Dreiecke AFD und $AD'F$ kongruent zueinander sind, ist $|\sphericalangle D'AF| = \alpha$ und $|\sphericalangle AFD'| = \beta$. Folglich ist auch $|\sphericalangle BAF| = \beta$ und $|FD| = |FD'| = \frac{1}{2}a$. Damit ist das Dreieck CFD' gleichschenkelig mit $|FD'| = |FC| = \frac{1}{2}a$ und $|\sphericalangle D'FC| = 180^\circ - 2\beta$. Also hat jeder Basiswinkel in diesem Dreieck die Größe β , insbesondere ist damit $|\sphericalangle FCD'| = \beta$.

Das bedeutet aber, dass CD' parallel zu AF ist. Da auch die Diagonale CE parallel zu AF ist und es nur eine Parallele durch C zu AF gibt, muss D' auf EC liegen.

Wir kehren noch einmal zur Flächenhalbierung zurück und überlegen uns jetzt, wie wir diese Eigenschaft auch ohne Flächenberechnung nachweisen können. Dazu gehen wir von der Faltung in Bild 73d aus und falten B' und D' an EF um (Bild 77a). Wir werden jetzt zeigen, dass die beiden Dreiecke ES_2B^* bzw. FS_1D^* kongruent zu CFS_2 bzw. AES_1 sind. Dazu entfalten wir B^* wieder nach B (Bild 77b).

Es ist $\sphericalangle ECB \cong \sphericalangle CEF$ (Winkel an geschnittenen Parallelen) und wegen der Faltung an EC auch $\sphericalangle S'_2EC \cong \sphericalangle CED$. Folglich ist CES'_2 gleichschenkelig, woraus $|ES'_2| = |CS'_2|$ folgt.

Falten wir wieder B nach B^* zurück (Bild 77c) so erkennen wir zusätzlich, dass $|FC| = |EB| = |EB^*|$ ist. Wegen (Ssw) sind die beiden Dreiecke EB^*S_2 und CFS_2 kongruent zueinander, was analog auch für die beiden Dreiecke FD^*S_1 und AES_1 gilt.

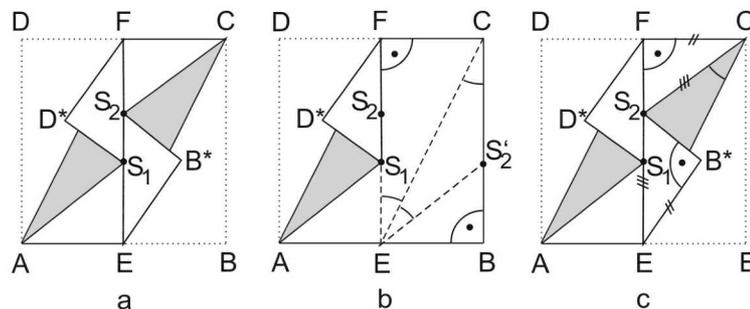


Bild 77

Würden wir die überstehenden Dreiecke abschneiden und sie auf die zugehörigen freien Flächen legen, wäre das Parallelogramm $AECF$ mit zwei Papierschichten vollständig bedeckt, woraus sofort

die Flächenhalbierung folgt.

Nun ersetzen wir noch die Mittellinie EF , wie in Variante 1, durch eine beliebige Senkrechte zu AB (Bild 78). Dadurch entstehen die beiden Rechtecke $Aefd$ und $EBCF$. C falten wir an der Diagonalen AF und B an der Diagonalen EC um. Dann entsteht ein Trapez $AECF$ für dessen Flächeninhalt $|AECF| = \frac{|AE|+|FC|}{2} \cdot |EF| = \frac{a}{2} \cdot a = \frac{1}{2}a^2$ gilt. Damit entsteht auch hier eine Flächenhalbierung, unabhängig von der Wahl der Senkrechten EF .

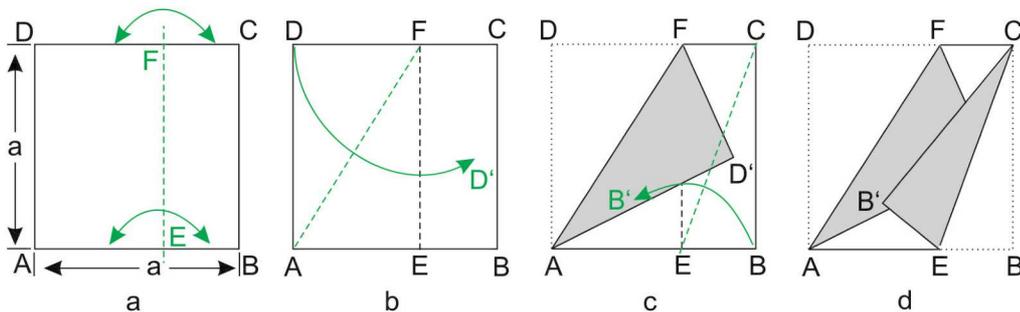


Bild 78

7.4 Quadrathalbierung längs einer Diagonalen und $\sqrt{2}$

Auch hier starten wir wieder mit einem Quadrat $ABCD$ bei dem die Kantenlänge a ist. Falten wir nun B auf D , so geht die Faltlinie durch die anderen beiden Eckpunkte A und C des Quadrates, die Faltlinie bestimmt also eine Diagonale im Quadrat (Bild 79). Die entstehende Figur ist ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck. Nach der Faltung liegen wieder zwei Schichten Papier direkt übereinander. Damit ist der Flächeninhalt des gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks ACD halb so groß wie der Flächeninhalt des Ausgangsquadrates. Dies kommt auch in der Formel für den Flächeninhalt F_D dieses Dreiecks zum Ausdruck, wenn man CD als Grundseite und AD als zugehörige Höhe wählt: $F_D = \frac{1}{2}a^2$.

Bei dieser Faltung werden die beiden rechten Winkel des Quadrates bei A und C halbiert, die Innenwinkel des Dreiecks ACD bei A und C haben demzufolge jeweils die Größe von 45° . Dies steht natürlich im Einklang mit der Innenwinkelsumme im Dreieck und mit dem Satz, dass die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck gleich groß sind.

Falten wir das Dreieck ACD wieder zum Quadrat $ABCD$ auseinander und verbinden mit Bleistift und Lineal die Punkte B und D . Dann ist BD die zweite Diagonale im Quadrat. Den Schnittpunkt von AC mit BD bezeichnen wir mit M . Aufgrund der Faltung halbiert M die Strecke BD , denn nach dem Falten liegt MB direkt über MD . Würde man das Quadrat entlang der Diagonalen BD falten, dann würde A auf C und MA auf MC zu liegen kommen. Folglich halbiert auch M die

Diagonale AC .

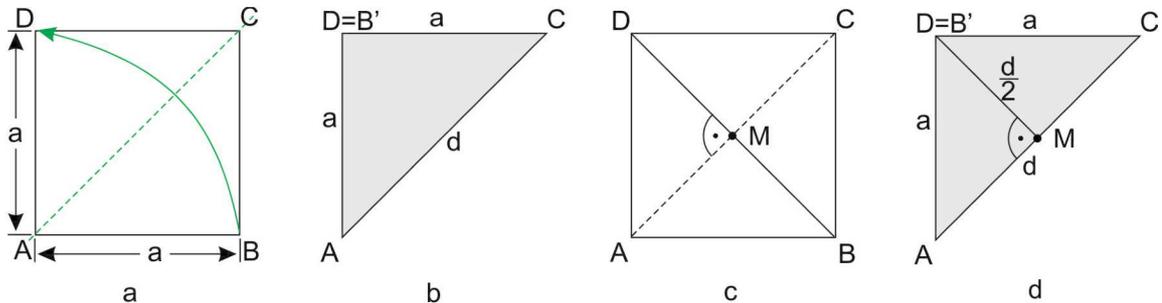


Bild 79

Betrachten wir noch einmal das aus dem Quadrat $ABCD$ gefaltete Dreieck ACD . Dieses Dreieck ist gleichschenkelig-rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei B und die beiden Katheten (die Schenkel) des Dreiecks haben jeweils die Länge a . AC ist die Hypotenuse dieses Dreiecks mit der Länge d . Wenn man den Satz des Pythagoras noch nicht kennt, kann man trotzdem die Länge d einer Diagonalen eines Quadrates in Abhängigkeit von seiner Seitenlänge a bestimmen. Dazu müssen wir nur bedenken, dass das Dreieck ACD im Vergleich zum Quadrat $ABCD$ den halben Flächeninhalt hat, die Diagonalen im Quadrat senkrecht zueinander sind und der Diagonalschnittpunkt M diese halbiert. Nun berechnen wir den Flächeninhalt F_{ACD} des Dreiecks ACD , indem wir AC als Grundseite verwenden. Wir erhalten dann $F_{ACD} = \frac{1}{2}|AC||MD| = \frac{1}{2}d \frac{d}{2} = \frac{1}{4}d^2$. Andererseits ist $F_{ACD} = \frac{1}{2}F_{ABCD}$, also $\frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{2}a^2$. Daraus ergibt sich $d^2 = 2a^2$ bzw. $d = a\sqrt{2}$.

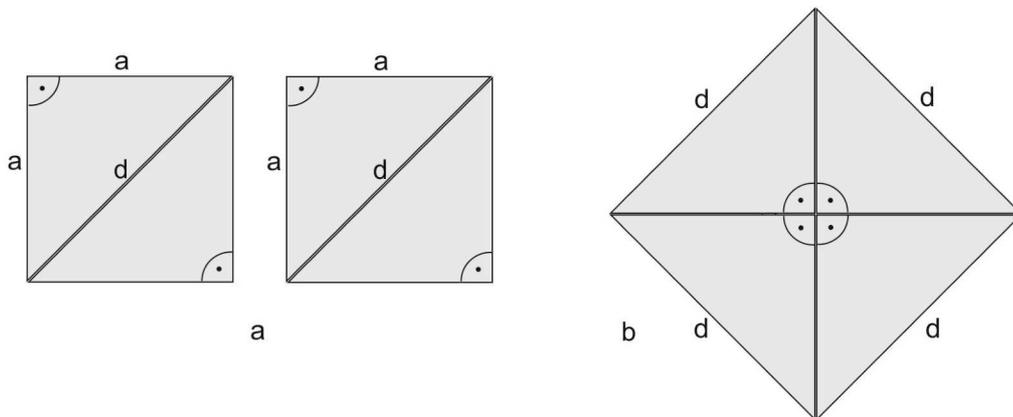


Bild 80

Diese Bestimmung von d können wir aber auch auf einem anderen Weg (ohne Verwendung des Satzes des Pythagoras) erhalten. Dazu falten wir vier kongruente Quadrate jeweils entlang einer Diagonalen zu gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken. Aus diesen vier Dreiecken können wir einerseits zwei Quadrate, jeweils Kantenlänge a , legen (Bild 80a). Andererseits können wir aus diesen

vier Dreiecken auch ein Quadrat mit der Kantenlänge d legen (Bild 80b). Da wir für das große Quadrat als auch für die beiden kleineren Quadrate jeweils die vier Dreiecke verwendet haben, müssen die Flächeninhalte gleich sein. Es gilt also $d^2 = 2a^2$, woraus $d = a\sqrt{2}$.

Mit unseren Überlegungen haben wir die Länge einer Diagonalen im Quadrat bestimmt, ohne den Satz des Pythagoras zu benutzen. Dass sich diese Methode auch zur Herleitung bzw. zur Entdeckung des Satzes des Pythagoras eignet, werden wir an späterer Stelle sehen (Kapitel 8.2). Wir fragen dann nämlich nach der Länge einer Diagonalen in einem Rechteck.

7.5 Eine weitere Quadrathalbierung längs einer Diagonalen

Wieder starten wir mit einem Quadrat $ABCD$ bei dem die Kantenlänge a und AC eine eingefaltete Diagonale ist (Bild 81a). Dann falten wir B und D so auf diese Diagonale, dass die jeweilige Faltgerade durch C geht. E und F sind die Schnittpunkte dieser Faltgeraden mit den Quadratseiten AB und AD (Bild 81b). $G = B' = D'$ bezeichnet den Punkt auf AC in dem B und D nach dem Umfalten zu liegen kommen (Bild 81c). Weil A die Seitenlänge des Ausgangsquadrates ist, ist $|AC| = a\sqrt{2}$ und $|GC| = a$. Folglich ist $|AG| = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$.

Im Dreieck AFG hat der Innenwinkel bei G die Größe 90° und der Innenwinkel bei A die Größe 45° . Folglich hat der Innenwinkel bei F ebenfalls die Größe 45° . Damit ist AFG ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck und es ist $|AG| = |GF| = a(\sqrt{2} - 1)$

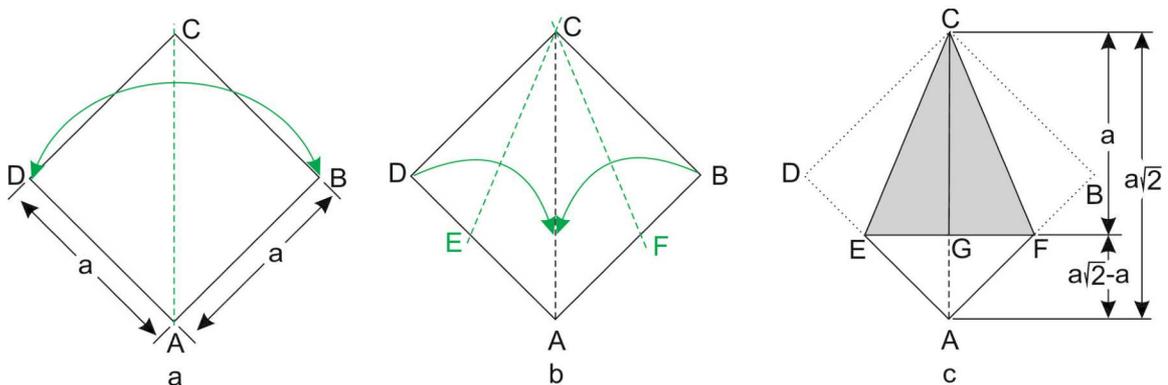


Bild 81

Es ist natürlich klar, dass der Flächeninhalt des Vierecks $AFCE$ größer als die Hälfte des Flächeninhaltes vom Ausgangsquadrat $ABCD$ ist, da das Viereck nicht überall mit zwei Papierschichten bedeckt ist. Daraus ergibt sich die folgende Frage: Wie muss A an einer Faltlinie, die senkrecht zu AC ist, umgefaltet werden, damit eine Figur mit dem halben Flächeninhalt vom Ausgangsquadrat entsteht? Im Bild 82a bezeichnet KL eine solche, zu AC senkrechte Faltlinie, die AC in H schnei-

det. h bezeichnet den Abstand $|AH|$. Wie muss h gewählt werden, damit nach dem Umfalten von A an KL (Bild 82b) das Fünfeck $KLFCE$ einen Flächeninhalt hat, der dem halben Flächeninhalt des Ausgangsquadrates entspricht?

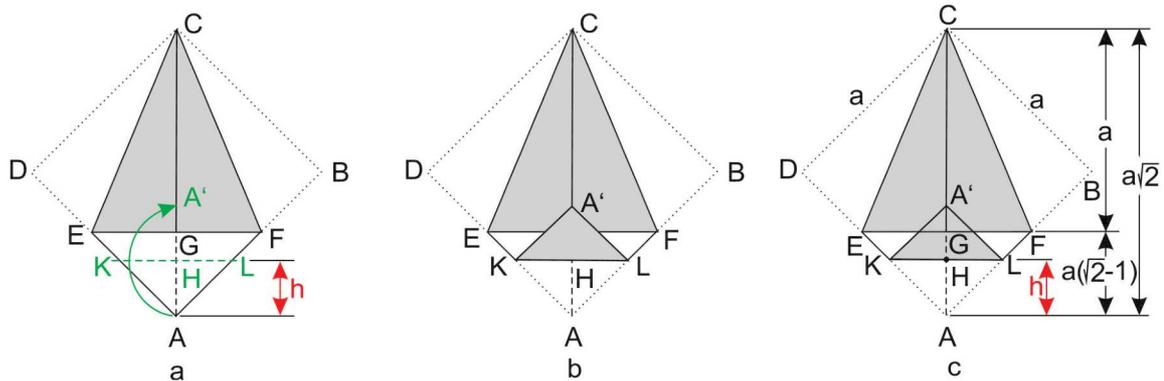


Bild 82

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir Bild 82c und berechnen den Flächeninhalt des Fünfecks $KLFCE$. Es ist $|KLFCE| = |EFC| + |KLFE|$. Wir erhalten

$$|EFC| = \frac{2(\sqrt{2}-1)a \cdot a}{2} = (\sqrt{2}-1)a^2 \text{ und}$$

$$|KLFE| = \frac{2h+2(\sqrt{2}-1)a}{2}((\sqrt{2}-1)a-h) = (h+(\sqrt{2}-1)a)((\sqrt{2}-1)a-h)$$

$$= ((\sqrt{2}-1)a+h)((\sqrt{2}-1)a-h) = (\sqrt{2}-1)^2 a^2 - h^2.$$

Weil $|KLFCE| = |EFC| + |KLFE| = \frac{1}{2}|ABCD| = \frac{1}{2}a^2$ gelten soll, erhalten wir

$$(\sqrt{2}-1)a^2 + (\sqrt{2}-1)^2 a^2 - h^2 = \frac{1}{2}a^2, \text{ woraus sich}$$

$$h^2 = (\sqrt{2}-1)a^2 + (\sqrt{2}-1)^2 a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)a^2 \text{ ergibt. Folglich wird}$$

$$h^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}a^2 = \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2}a^2 = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}a^2, \text{ also}$$

$$h = \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}a = \frac{(2-\sqrt{2})}{2}a.$$

Damit haben wir aber den Abstand h bestimmt, der uns ein Fünfeck liefert, dessen Flächeninhalt halb so groß ist wie der des Ausgangsquadrates.

Berechnen wir nun noch die Länge der Strecke AL , so erhalten wir

$$|AL| = h\sqrt{2} = \frac{(2-\sqrt{2})}{2}\sqrt{2}a = (\sqrt{2}-1)a. \text{ Dies bedeutet aber, dass } |AL| = |AG| \text{ ist. Mit dieser Erkenntnis können wir sogar eine Faltkonstruktion für das Fünfeck } KLFCE \text{ ableiten.}$$

Wir müssen nach den obigen Überlegungen auf AF einen Punkt L so bestimmen, dass $|AL| = |AG|$ ist (Bild 83a). Dies können wir erreichen, indem wir F so auf AC falten, dass die Faltpflichte durch A geht. Dabei geht F nach F' und P bezeichnet den Schnittpunkt der Faltpflichte mit CF (Bild 83b). Der Punkt G bestimmt jetzt auf AF' den Punkt L' mit $|AG| = |AL'|$. Zum Markieren dieses Punktes falten wir A an der durch E und G bestimmten Faltpflichte um (Bild 83c). Die letzten beiden Faltschritte machen wir wieder rückgängig und erhalten die Figur aus Bild 83d, in der L der

gesuchte Punkt auf AF ist. Zum Abschluss falten wir A so auf GC , dass die Faltnie durch L geht. K ist der zugehörige Schnittpunkt mit AE . Nun ist $KLFCE$ ein Fünfeck, dessen Flächeninhalt halb so groß ist wie der des Ausgangsquadrates $ABCD$.

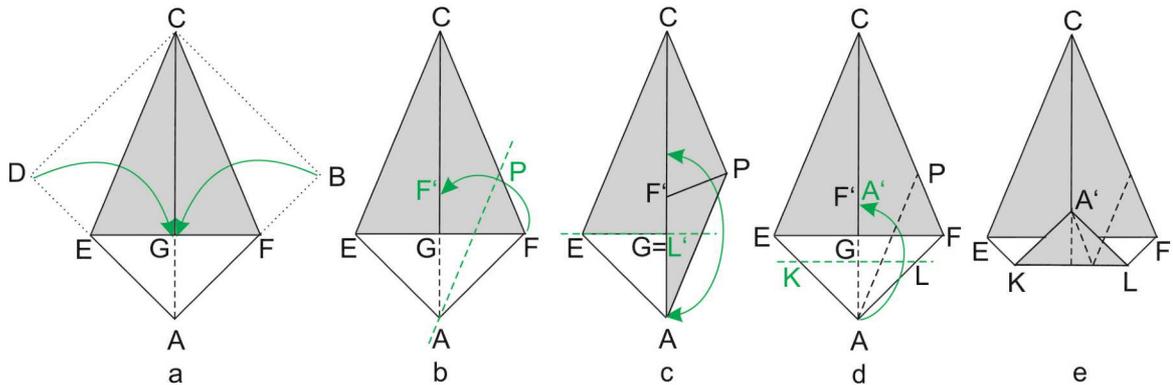


Bild 83: Faltfolge 1

Wenn man den obigen Faltprozess zum Fünfeck durchführt, dann zeigt sich, dass eventuell A' mit F' zusammenfällt. Ob dies tatsächlich so ist, wollen wir jetzt überprüfen.

Wir wollen also $|AF'| = |AF| = |AA'|$ zeigen.

Von den obigen Überlegungen wissen wir, dass $|AF| = |AG|\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)a\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})a$ ist. Andererseits ist $|AA'| = 2|AG| = 2h = 2\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a = 2(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})a = (2 - \sqrt{2})a$.

Damit ist tatsächlich $|AA'| = |AF'|$ und wir können eine zweite Faltfolge für das Fünfeck $KLFCE$ angeben (Bild 84a-c).

Dazu falten wir zuerst entsprechend der Bilder 83a-c. Dann falten wir entlang der durch P und F' bestimmten Faltnie, um F' auf die Diagonale AC zu übertragen (Bild 84a). Machen wir diese Faltung wieder rückgängig und ebenso das Falten von F am AP , so können wir nun A auf F' falten. Dabei entsteht die Faltnie LK (Bild 84b). Das Ergebnis ist das Fünfeck $KLFCE$ (Bild 84c), dessen Flächeninhalt halb so groß ist wie der des Ausgangsquadrates $ABCD$.

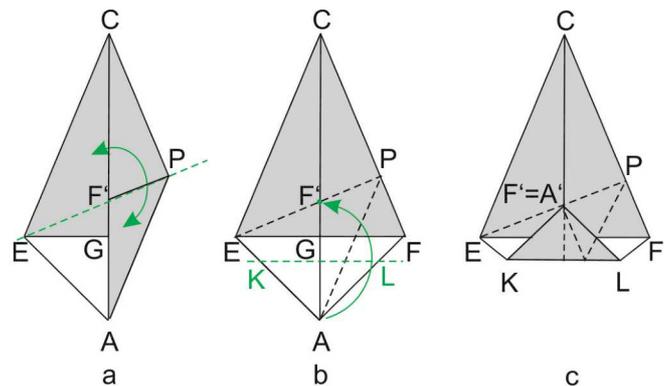


Bild 84: Faltfolge 2

Beim Falten nach Bild 84 haben wir den Eindruck, dass die Faltnie, die durch P und F' bestimmt ist, durch E geht. Dies wollen wir jetzt zum Abschluss dieses Abschnittes überprüfen. Dazu legen wir die Figur in ein Koordinatensystem, so wie es Bild 85 zeigt. Gleichzeitig tragen wir die

entsprechenden Werte aus den vorhergehenden Überlegungen mit ein. Zusätzlich bezeichnet S den Schnittpunkt der Geraden durch C und F mit der x -Achse.

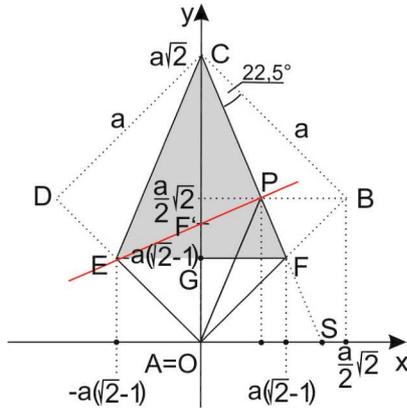


Bild 85

Zur Überprüfung unserer Vermutung bestimmen wir die Gleichung der durch P und F' bestimmten Geraden. Anschließend sehen wir nach, ob E auf dieser Geraden liegt. Dazu müssen wir zuerst die Koordinaten der entsprechenden Punkte bestimmen.

Weil $|OF'| = |OF| = a(\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt{2} = a(2 - \sqrt{2})$ ist, hat F' die Koordinaten $F'(0; a(2 - \sqrt{2}))$.

Nun müssen wir die Koordinaten von P bestimmen. Da die y -Koordinate von P den Wert $y_P = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ hat, halbiert der entsprechende Punkt auf der y -Achse die Strecke OC . Folglich halbiert auch P die Strecke SC (Strahlensatz, Zentrum C). Demzufolge gibt die x -Koordinate von P den Mittelpunkt der Strecke OS an. Wenn wir x_P bestimmen wollen, müssen wir zuerst

die x -Koordinate von $S(x_S; 0)$ bestimmen. Dazu benötigen wir die Gleichung der Geraden durch $C(0; a\sqrt{2})$ und $F(a(\sqrt{2} - 1); a(\sqrt{2} - 1))$. Es ist $g(CF) : y = \frac{a\sqrt{2} - a(\sqrt{2} - 1)}{0 - a(\sqrt{2} - 1)}x + a\sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2} - 1}x + a\sqrt{2}$.

Nun müssen wir die Koordinaten von P bestimmen. Da die y -Koordinate von P den Wert $y_P = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ hat, halbiert der entsprechende Punkt auf der y -Achse die Strecke OC . Folglich halbiert auch P die Strecke SC (Strahlensatz, Zentrum C). Demzufolge gibt die x -Koordinate von P den Mittel-

punkt der Strecke OS an. Wenn wir x_P bestimmen wollen, müssen wir zuerst die x -Koordinate von $S(x_S; 0)$ bestimmen. Dazu benötigen wir die Gleichung der Geraden durch $C(0; a\sqrt{2})$ und $F(a(\sqrt{2} - 1); a(\sqrt{2} - 1))$. Es ist $g(CF) : y = \frac{a\sqrt{2} - a(\sqrt{2} - 1)}{0 - a(\sqrt{2} - 1)}x + a\sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2} - 1}x + a\sqrt{2}$.

Weil die Koordinaten von $S(x_S; 0)$ diese Gleichung erfüllen, gilt $0 = -\frac{1}{\sqrt{2} - 1}x_S + a\sqrt{2}$.

Also $x_S = a\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = a(2 - \sqrt{2})$ und damit $x_P = \frac{1}{2}x_S = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$.

Damit hat P die Koordinaten $P(\frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}); \frac{a}{2}\sqrt{2})$.

Nun können wir die Gleichung der Geraden durch P und F' bestimmen. Es ist

$$g_{PF'} : y = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2} - a(2 - \sqrt{2})}{\frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}) - 0}x + a(2 - \sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2 - \sqrt{2}}x + a(2 - \sqrt{2}).$$

Setzen wir in dieser Gleichung für x die x -Koordinaten von E , also $x_E = -a(\sqrt{2} - 1)$ ein, so erhalten wir $y = -\frac{3\sqrt{2} - 4}{2 - \sqrt{2}}a(\sqrt{2} - 1) + a(2 - \sqrt{2}) = -\frac{3\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}a(\sqrt{2} - 1) + a(2 - \sqrt{2}) = \dots = a(\sqrt{2} - 1) = y_E$.

Damit liegt der Punkt E auf der Geraden durch P und F' und unsere Vermutung ist richtig.

7.6 Quadrathalbierung zum Mittelpunkt

Wir betrachten nun den Mittelpunkt M unseres Faltquadrates $ABCD$ und falten die Ecken auf diesen Mittelpunkt, wie es im Bild 86b gezeigt ist. Zuerst alle vier, dann drei, dann zwei und am

Ende nur eine Ecke.

Nur im ersten Fall, wenn wir alle vier Ecken in den Mittelpunkt falten, entsteht sofort eine Flächenhalbierung. In den anderen Fällen müssen zusätzliche Faltungen durchgeführt werden, damit wir eine Flächenhalbierung erreichen. Dazu werden verschiedene Möglichkeiten untersucht. Natürlich ergeben sich hier auch weiterführende Untersuchungsmöglichkeiten, die zur selbstständigen Arbeit anregen können.

7.6.1 Vier Dreiecke werden umgefaltet

Wieder ist $ABCD$ unser Ausgangsquadrat mit der Kantenlänge a . Wir falten zuerst die beiden Mittelparallelen (Bild 86a), wobei der Mittelpunkt M des Quadrates entsteht. Anschließend falten wir die Ecken des Quadrates auf M (Bild 86b). Dadurch entsteht ein neues, kleineres Quadrat $EGFH$ mit der Seitenlänge s , welches mit zwei Papierschichten bedeckt ist (Bild 86c), also den halben Flächeninhalt wie das Ausgangsquadrat hat. Auch die Länge von s können wir sofort angeben. Dazu bedenken wir, dass z.B. EG eine Diagonale im Quadrat $EBGM$ mit der Kantenlänge $\frac{1}{2}a$ ist. Nach den obigen Überlegungen ist $s = |EG| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

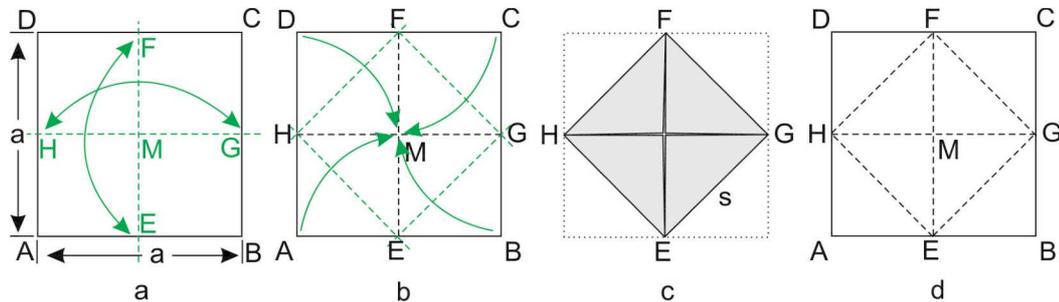


Bild 86

Natürlich können wir unsere Fragestellung auch umkehren. D.h., wir suchen zu einem gegebenen Quadrat ein neues Quadrat, das den doppelten Flächeninhalt hat. Eine Lösungsidee ergibt sich sofort aus Bild 86d: Die nach innen gefalteten Dreiecke unseres neuen Ausgangsquadrates werden einfach nach außen gefaltet. Zu dieser Quadratverdopplung kann man auch den Dialog zwischen SOKRATES und MENON lesen (vgl. [27]).

7.6.2 Drei Dreiecke werden umgefaltet

In unser quadratisches Faltpapier wird wieder der Mittelpunkt M bestimmt (Bild 87a) und dann nur drei Ecken, etwa A , C und D , zum Mittelpunkt umgefaltet (Bild 87b).

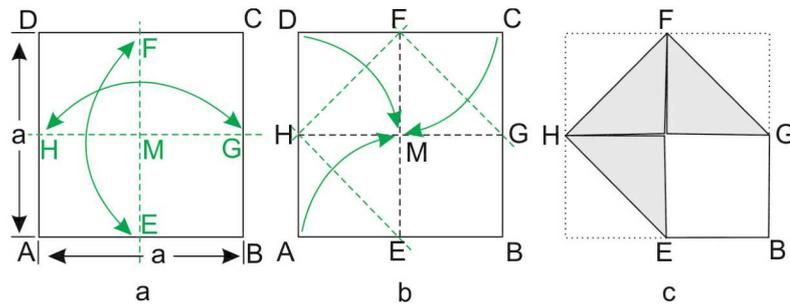


Bild 87

Dann entsteht ein Fünfeck $EBGFH$ (Bild 87c). Dieses Fünfeck hat den Flächeninhalt $|EBGFH| = 3 \cdot \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{8}a^2$, also $\frac{1}{8}a^2$ mehr als $\frac{1}{2}a^2$. Dieses $\frac{1}{8}a^2$ muss nun noch weggefaltet werden. Dies kann sicher auf verschiedene Arten geschehen. Wir wollen hier zwei Varianten untersuchen, bei denen parallel zu EB und BG (Bild 88a) bzw. nur parallel zu EB (Bild 89a) gefaltet wird.

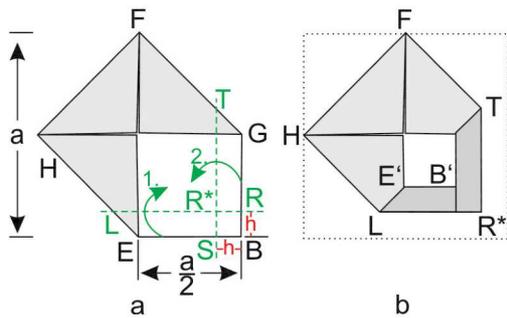


Bild 88

Variante 1: In dieser Variante wollen wir parallel zu EB und BG so falten, dass die Faltnen LR und ST zu EB bzw. BG jeweils den Abstand h haben (Bild 88a). Unsere Aufgabe ist es, den Abstand h so zu bestimmen, dass das (nicht konvexe) Polygon $EBGTR^*L$ einen Flächeninhalt von $\frac{1}{8}a^2$ hat. Diese Fläche setzt sich aus zwei zueinander kongruenten Trapezen $EBRL$ und $BGTS$ zusammen, wobei das Quadrat $SBRR^*$ doppelt einfließt.

$$\text{Es gilt also } |EBGTR^*L| = 2 \cdot \frac{\frac{a}{2} + (\frac{a}{2} + h)}{2} \cdot h - h^2 = \frac{1}{8}a^2.$$

Daraus ergibt sich $(a + h)h - h^2 = \frac{1}{8}a^2$, woraus $h = \frac{1}{8}a$ folgt. Dieser Wert lässt sich gut durch Halbieren von EB und BG erzeugen. Es müssen dann nur noch EB und BG an die entsprechenden Halbierungslinien herangefaltet werden.

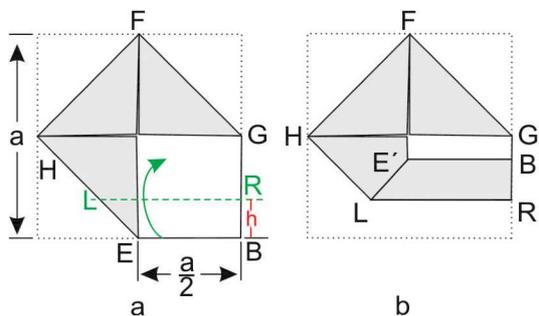


Bild 89

Variante 2: Nun wollen wir nur an LR parallel zu EB umfalten (Bild 89a). Dabei hat die Faltnen LR zu EB den Abstand h . Dieser Abstand h muss wieder so bestimmt werden, dass das Trapez $EBRL$ den Flächeninhalt $\frac{1}{8}a^2$ hat. Es muss also $|EBRL| = \frac{\frac{a}{2} + (\frac{a}{2} + h)}{2} \cdot h = \frac{1}{8}a^2$

gelten.

$$\text{Also } \frac{a+h}{2} \cdot h = \frac{1}{8}a^2 \text{ bzw. } h^2 + ah - \frac{1}{4}a^2 = 0. \text{ Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen}$$

$h_1 = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $h_2 = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Weil $h_1 > 0$ und $h_2 < 0$ ist, kommt für unsere Problemstellung nur h_1 als Lösung in Frage.

Es ist also $h = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{2}$. Mit diesem Wert entsteht das Fünfeck $LRGFH$, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$ ist (Bild 89b).

Der Wert für h lässt sich ebenfalls durch Falten gut ermitteln, wenn man bedenkt, dass die Diagonale in einem Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{1}{2}a$ die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ hat. Zuerst falten wir die Diagonale EG (Bild 90a) und dann falten wir B so auf diese Diagonale, dass die Faltlinie durch E geht (Bild 90b). Diese Faltlinie schneidet BG in einem Punkt R . Wir zeigen nun, dass $|BR| = h = \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{2}$ ist. Weil $|EB| = |EB'| = \frac{a}{2}$ ist, ist $|B'G| = \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{2} = h$. Weil außerdem RGB' ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck ist, ist $|B'G| = |B'R|$. Aufgrund der Faltung von B auf EG ist $|B'R| = |BR|$. Insgesamt ergibt sich $|BR| = h$, womit R der gesuchte Punkt auf BG ist. Wir müssen also nur B auf BG so falten, dass die Faltlinie durch R geht. Damit entsteht das gewünschte Fünfeck, welches den halben Flächeninhalt im Vergleich zum Ausgangsquadrat hat.

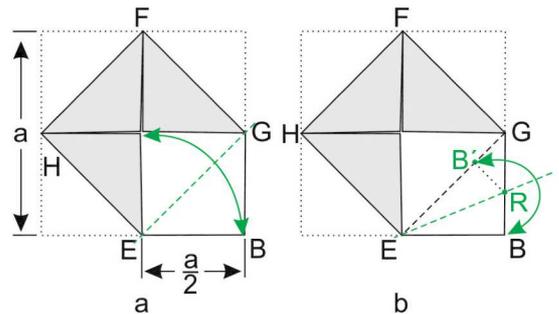


Bild 90

7.6.3 Zwei nebeneinander liegende Dreiecke werden umgefaltet

Auch hier wird zuerst der Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ bestimmt (Bild 91a) und dann werden zwei Ecken, z.B. A und D auf M gefaltet, sodass das Fünfeck $HEBCF$ entsteht (Bild 91c). Dieses Fünfeck hat den Flächeninhalt $|HEBCF| = 2 \cdot \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{4}a^2$, übertrifft damit $\frac{1}{2}a^2$ um $\frac{1}{4}a^2$. Wir müssen von diesem Fünfeck damit noch ein Flächenteil mit dem Inhalt $\frac{1}{4}a^2$ weggefalten, um eine Figur mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$ zu erhalten. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten.

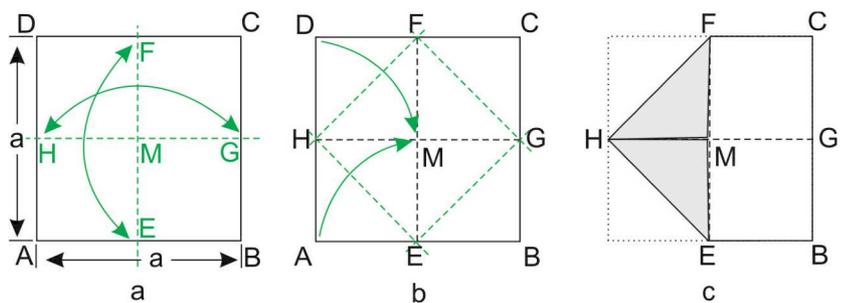


Bild 91

Dieses Fünfeck hat den Flächeninhalt $|HEBCF| = 2 \cdot \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{4}a^2$, übertrifft damit $\frac{1}{2}a^2$ um $\frac{1}{4}a^2$. Wir müssen von diesem Fünfeck damit noch ein Flächenteil mit dem Inhalt $\frac{1}{4}a^2$ weggefalten, um eine Figur mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$ zu erhalten. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten.

Variante 1: Wir falten B und C auf E und F (Bild 92a). Dann entsteht ein Fünfeck $EUVFH$ (Bild 92b). Da dieses Fünfeck mit zwei Papierschichten bedeckt ist, ist sein Flächeninhalt halb so groß wie der des Ausgangsquadrates.

Variante 2: Wir falten H an EF auf G (Bild 93a). Dann entsteht das Rechteck $EBCF$ (Bild 93b), das den halben Flächeninhalt vom Ausgangsquadrat hat.

Variante 3: Wir falten B an der Diagonalen EC um (Bild 94a). Dabei entsteht das Viereck $ECFH$ (Bild 94b). Dieses Viereck ist nicht überall mit zwei Papierschichten bedeckt, sodass wir nicht sofort erkennen können, ob der Flächeninhalt dieses Vierecks halb so groß ist wie der des Ausgangsquadrates.

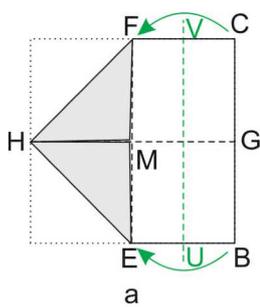


Bild 92

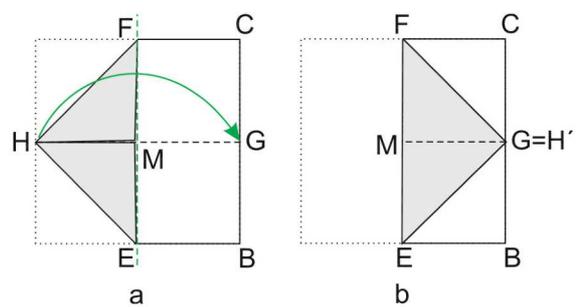


Bild 93

Natürlich ist $|EBC| = |EB'C| = \frac{1}{4}a^2$, woraus $|HECF| = \frac{1}{2}a^2$ sofort folgt.

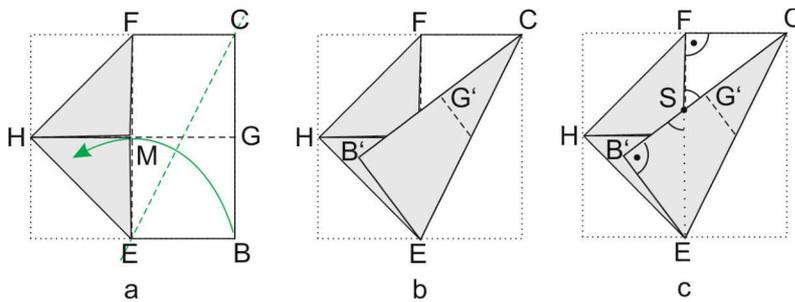


Bild 94

Folglich muss die dreifach bedeckte Fläche gleich der einfach bedeckten Fläche sein. Um dies einzusehen bezeichnen wir den Schnittpunkt von EF mit $B'C$ mit S (Bild 94c). Dann ist das Dreieck ESB' dreifach, das Dreieck CSF nur einfach und der Rest des Vierecks zweifach mit Papier bedeckt. Wir erkennen aber so-

fort, dass die Dreiecke ESB' und CSF wegen (wws) kongruent zueinander sind, wobei $|EB'| = |CF| = \frac{1}{2}a$ ist. Würden wir nun das Dreieck ESB' abschneiden, so könnten wir dieses Dreieck deckungsgleich auf das Dreieck CSF legen, womit das Viereck $ECFH$ überall doppelt mit Papier bedeckt wäre. Also ist auch hier der Flächeninhalt des Vierecks $ECFH$ halb so groß wie der des Ausgangsquadrates.

Variante 4: Wir falten C auf E , wobei die Faltlinie LR entsteht (Bild 95a). Dabei ergibt sich das Fünfeck $EBRLH$. Wir werden jetzt überprüfen, ob der Flächeninhalt dieses Fünfecks auch halb so groß wie der des Ausgangsquadrates ist. Dazu bezeichnen wir den Schnittpunkt von LR und EF mit N und den mit der Diagonalen EC mit O . Wegen der Faltung von C auf E an LR ist LR die

Mittelsenkrechte von EC . O ist damit auch Mittelpunkt von EC und die markierten Winkel bei O sind rechte Winkel. Ergänzend sei auch bemerkt, dass wegen des Strahlensatzes (Zentrum C), auch HG durch O geht.

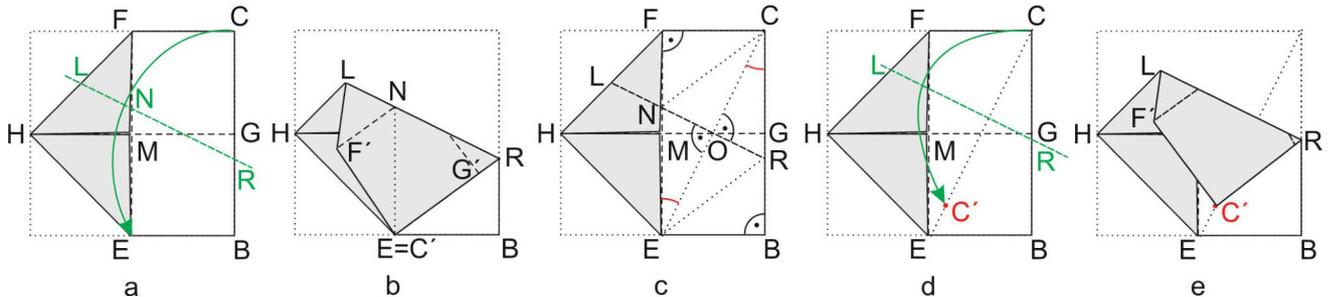


Bild 95

Ferner folgt $|NE| = |NC|$ und $|RE| = |RC|$. Nun sind aber auch die markierten Winkel bei C und E kongruent zueinander, da es Winkel an geschnittenen Parallelen sind. Folglich sind die beiden Dreiecke EON und COR wegen (wsw) kongruent zueinander. Damit ist aber $ERCN$ ein Rhombus und die beiden Dreiecke EBR und CFN sind wegen (Ssw) zueinander kongruent.

Dem Dreieck CFN entspricht aber das Dreieck $EF'N$ nach dem Umfalten (Bild 95b). Dieser Teil des Fünfecks $EBRLH$ ist mit drei Schichten Papier bedeckt, während das Dreieck EBR nur mit einer Schicht bedeckt ist. Das würde sich also ausgleichen. Aber das Dreieck LNF' ist sogar mit vier Schichten Papier bedeckt, wofür es keinen Ausgleich in der Figur gibt. Damit ist die Fläche des Fünfecks $EBRLH$ kleiner als die Hälfte der Fläche des Ausgangsquadrates. Also keine Flächenhalbierung.

Damit ergibt sich die Frage: Wo muss auf EC der Punkt C' gewählt werden (Bild 95d), damit beim Falten von C auf C' ein Fünfeck $EBRLH$ (Bild 95e) mit halbem Flächeninhalt im Vergleich zum Ausgangsquadrat entsteht? Diese Frage soll hier jedoch nicht beantwortet werden.

Variante 5: Jetzt falten wir C auf den Mittelpunkt von EH . Dabei entsteht die Faltnlinie LR (Bild 96a). Den Flächeninhalt des Fünfecks $EBRLH$ (Bild 96b) werden wir wieder mit dem des Ausgangsquadrates vergleichen und feststellen, dass der Flächeninhalt dieses Fünfecks etwas kleiner als der des halben Ausgangsquadrates ist.

Um dies zu zeigen, bezeichnen wir den Schnittpunkt von EF mit RC' mit S und den mit RL mit T . Aufgrund des Falten von C auf den Mittelpunkt von EH ist $RC' \parallel EB$. Folglich ist $EBRS$ ein Rechteck. Dieses ist nur mit einer Papierschicht bedeckt. Außerdem ist $F'C' \parallel EF$ und $RL \parallel EH$. Aufgrund dieser Parallelitäten ist ESC' ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck, und folglich gilt $|C'S| = |ES|$. Weiterhin ist $|F'C'| = |EB| = \frac{a}{2}$. Damit sind aber die beiden Rechtecke $EBRS$ und $STF'C'$ kongruent zueinander. Da über dem Rechteck $STF'C'$ drei Papierschichten liegen, gleicht

eine dieser Schichten die fehlende Schicht über $EBRS$ aus. Damit ist das Fünfeck fast überall zweifach, nur das Dreieck $F'TL$ ist vierfach mit Papier bedeckt. Folglich ist $|EBRLH| < \frac{1}{2}a^2$.

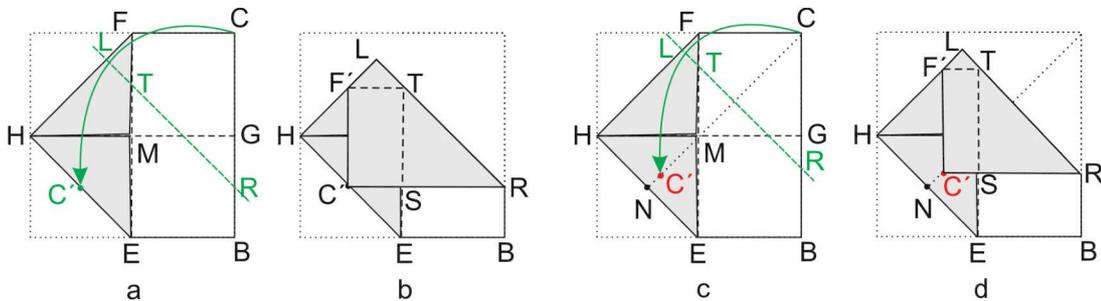


Bild 96

Damit ergibt sich die Frage: Wo muss auf CN der Punkt C' gewählt werden (Bild 96c), damit beim Falten von C auf C' ein Fünfeck $EBRLH$ (Bild 96d) mit halbem Flächeninhalt im Vergleich zum Ausgangsquadrat entsteht? Auch diese Frage werden wir hier nicht beantworten.

7.6.4 Zwei gegenüberliegende Dreiecke werden umgefaltet

Nun werden zwei gegenüberliegende Ecken, etwa A und C auf den Mittelpunkt M des Quadrates gefaltet (Bild 97), wobei das Sechseck $EBGFDH$ entsteht. Für den Flächeninhalt dieses Sechsecks gilt $|EBGFDH| = 2 \cdot \frac{1}{8}a^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$.

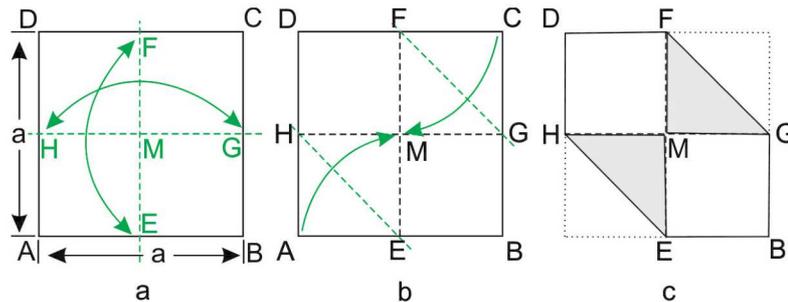


Bild 97

Damit übertrifft der Flächeninhalt dieses Sechsecks den halben Flächeninhalt des Ausgangsquadra-tes um $\frac{1}{4}a^2$.

Wir müssen also wieder einen Flächenanteil von $\frac{1}{4}a^2$ wegfallen, damit wir eine Figur mit halbem Flächeninhalt im Vergleich zum Ausgangsquadrat erhalten. Auch hier sind wieder verschiedene Varianten möglich.

Variante 1: Wir falten B auf BC und D auf DA , so dass die entsprechenden Faltnlinien LR und ST von EB und FD jeweils den gleichen Abstand h haben (Bild 98a). Welchen Wert muss h haben, damit das Sechseck $LRGTSH$ (Bild 98b) den halben Flächeninhalt im Vergleich zu dem des Ausgangsquadrates hat?

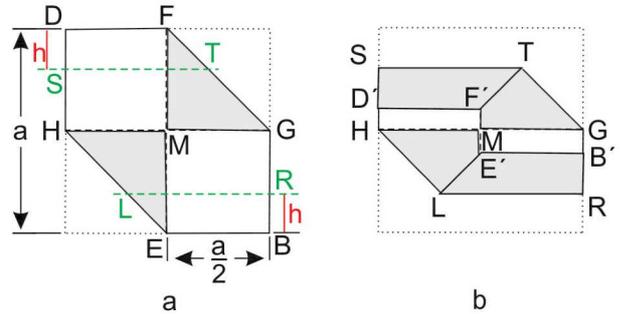


Bild 98

Diese Frage wollen wir jetzt beantworten. Dazu muss $2 \cdot \frac{\frac{a}{2} + (\frac{a}{2} + h)}{2} h = \frac{1}{4} a^2$ gelten. Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, von denen nur die positive für uns interessant ist.

Es ergibt sich $h = \frac{a}{2} \sqrt{2} - \frac{a}{2}$, genau wie in 7.6.2 (Variante 2). Dies war aber auch zu erwarten. Damit können wir auch die Punkte R und S , wie in den Bildern 90a-b beschrieben, bestimmen.

Variante 2: Wir falten B auf G wobei die Faltnlinie LR entsteht. Dann falten wir D auf DA , sodass die entsprechende Faltnlinie ST von FD den Abstand h hat (Bild 99a). Welchen Wert muss h haben, damit das Sechseck $LRGTSH$ (Bild 99b) den halben Flächeninhalt im Vergleich zu dem des Ausgangsquadrates hat?

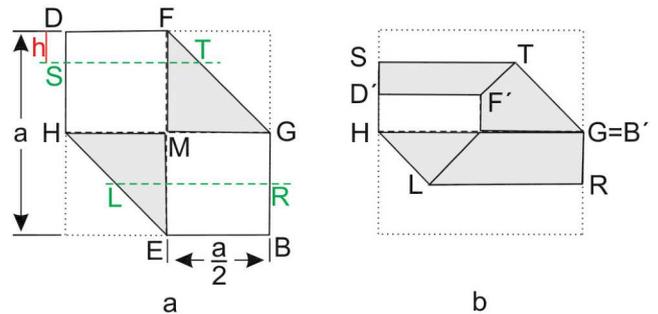


Bild 99

Um diese Frage zu beantworten, berechnen wir zuerst den Flächeninhalt des Sechsecks $HLLRGFD$. Es ist $|HLLRGFD| = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{8} a^2 + \frac{a + (\frac{a}{2} + \frac{a}{4})}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{19}{32} a^2$. Damit muss das Trapez $STFD$ den Flächeninhalt $\frac{3}{32} a^2$ haben. Es muss also $\frac{\frac{a}{2} + (\frac{a}{2} + h)}{2} h = \frac{3}{32} a^2$ gelten. Daraus ergibt sich $h^2 + ah - \frac{3}{16} a^2 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen für h , wobei uns nur die positive Lösung interessiert, also $h = \frac{a}{4} \sqrt{7} - \frac{a}{2}$.

Unsere Aufgabe ist es jetzt, diesen Wert für h auf AD von D durch Falten zu erzeugen.

Wir beginnen, indem wir in das quadratische Faltpapier die beiden Mittelparallelen EF und HG falten. M ist der Schnittpunkt dieser beiden Faltnlinien (Bild 100a).

Nun falten wir C so auf EF , dass die Faltnlinie durch D geht. Wir markieren C' (z.B. mit einem Stift) auf EF (Bild 100b). Dann ist $|DF| = \frac{a}{2}$ und $|DC'| = a$. Folglich ist $|FC'| = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{a}{2} \sqrt{3}$.

Jetzt (Bild 100c) falten wir F auf C' , wobei die Faltnlinie LR entsteht, die EF in O schneidet. Weiterhin verbinden wir D mit O z.B. durch Falten oder mit einem Lineal und Stift. Weil $|FO| = \frac{1}{2} |FC'| = \frac{a}{4} \sqrt{3}$ ist, erhalten wir $|DO| = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{4} \sqrt{3})^2} = \frac{a}{4} \sqrt{7}$. Toll! Das ist schon ein Teil von dem gesuchten Wert h .

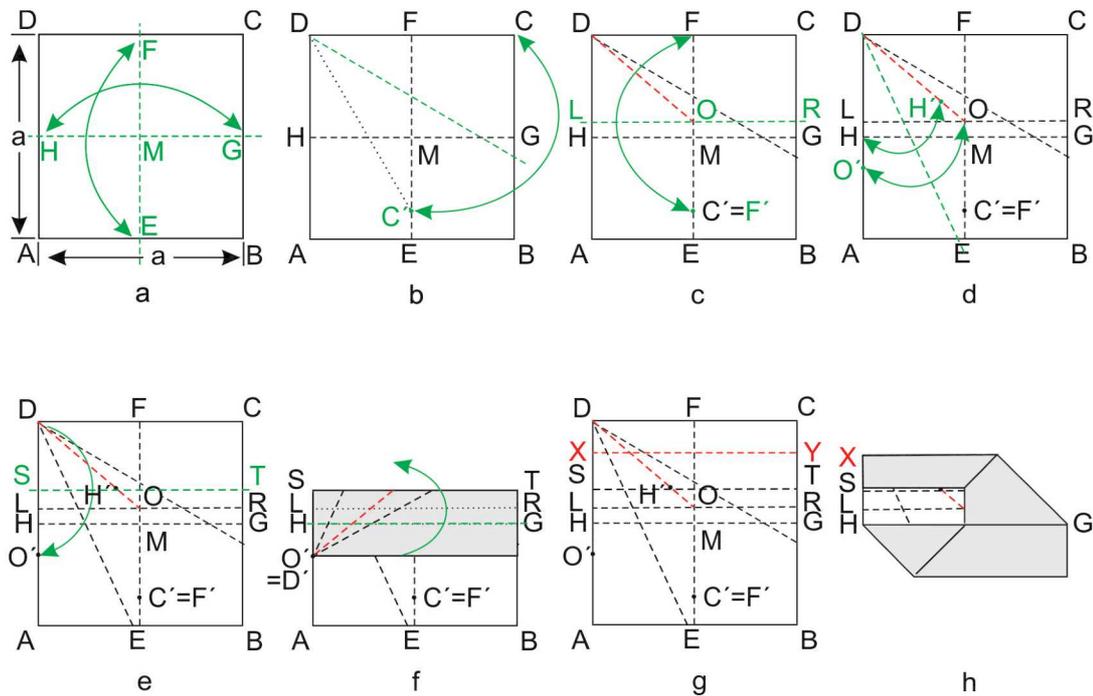


Bild 100

Wir falten weiter H so auf DO , dass die Faltlinie durch D geht. Auf DO markieren wir mit einem Stift den Punkt H' . Weil $|DH'| = |DH| = \frac{a}{2}$ ist, hat $H'O$ die gesuchte Länge h . Die Strecke $H'O$ müssen wir nun nur noch von D aus auf DA abtragen. Dies gelingt, indem wir beim Markieren von H' auf DO auch gleich O' auf der umgefalteten Kante DA markieren. Nach dem Auffalten hat HO' die Länge h (Bild 100d).

Bild 100e zeigt, dass wir D auf O' falten, wobei die Faltlinie SH entsteht. Diese Faltung machen wir nicht gleich wieder rückgängig. Vielmehr falten wir D' so nach oben, dass die in der oberen Schicht entstehende Faltlinie (die wir im nächsten Bild mit XY bezeichnen) mit der darunterliegenden Faltlinie HG übereinstimmt (Bild 100f). Abschließend falten wir das Quadrat wieder vollständig auseinander (Bild 100g). Dort ist XY die Faltlinie, die von DC den Abstand h hat. Mit diesen Vorbereitungen können wir jetzt endlich das gesuchte Sechseck falten, das den Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$ hat (Bild 100h).

Variante 3: Wir falten B auf BC , wobei die Faltlinie LR parallel zu HG ist und von AB den Abstand h hat (Bild 101a). Dabei falten wir die eventuell überstehende Ecke B' an FG nach hinten um. Wir müssen den Wert h wieder so bestimmen, dass die Fläche des Sechsecks $LRGFDH$ die Größe $\frac{1}{2}a^2$ hat (Bild 101b).

Dazu muss für den Flächeninhalt des Trapezes $EBRL$ gelten: $|EBRL| = \frac{\frac{a}{2} + (\frac{a}{2} + h)}{2} h = \frac{1}{4}a^2$.

Daraus ergibt sich $h^2 + ah - \frac{1}{2}a^2 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, von denen uns nur die positive interessiert. Wir erhalten $h = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

Dieser Wert kann durch Falten erzeugt werden. Dazu falten wir in das quadratische Faltpapier die Diagonale BD . Dann falten wir B so auf EF , dass die Faltlinie durch A geht. Diese Faltlinie schneidet BD in S und EF in T . Der Punkt S hat von AB den Abstand h . Um dies einzusehen, legen wir das Quadrat in ein Koordinatensystem wie es im Bild 102 gezeigt ist.

Weil ABB' ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a ist, ist $|EB'| = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Weiterhin sind AS und EF Seitenhalbierende in diesem Dreieck und schneiden sich demzufolge im Verhältnis $1 : 2$. Also ist $|ET| = \frac{a}{6}\sqrt{3}$. Folglich hat die Gerade $g(AS)$ durch A und S den Anstieg $\frac{a}{6}\sqrt{3} : \frac{a}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Damit ist $g(AS): y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x$ und $G(BD): y = -x + a$. Da die beiden Geraden durch den Punkt $S(x_S; y_S)$ gehen, muss $\frac{1}{3}\sqrt{3}x_S = -x_S + a$ gelten. Daraus erhalten wir $x_S = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{3})$ und daraus $y_S = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1) = h$. Damit haben wir aber den gesuchten Punkt S gefunden, der von AB den Abstand h hat. Die Faltung des Sechsecks ist damit aber klar.

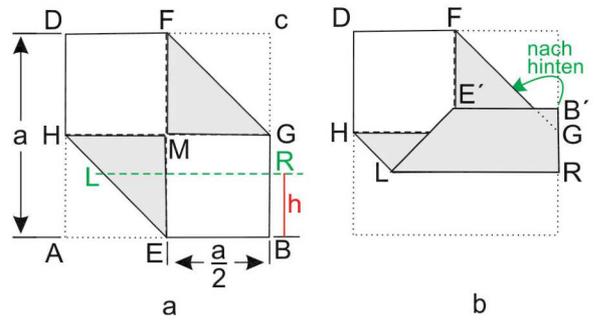


Bild 101

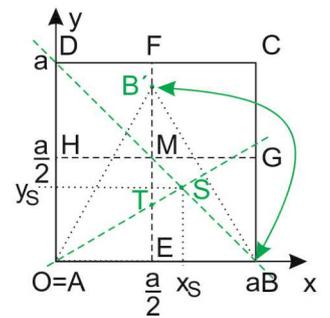


Bild 102

7.6.5 Ein Dreieck wird umgefaltet

Nun wird nur eine Ecke des Ausgangsquadrates $ABCD$, etwa D , auf den Mittelpunkt M des Quadrates gefaltet (Bild 103), wobei des Fünfeck $ABCFH$ entsteht.

Für den Flächeninhalt dieses Fünfecks gilt $|ABCFH| = 3 \cdot \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}a^2 = \frac{7}{8}a^2$. Damit übertrifft der Flächeninhalt dieses Sechsecks den halben

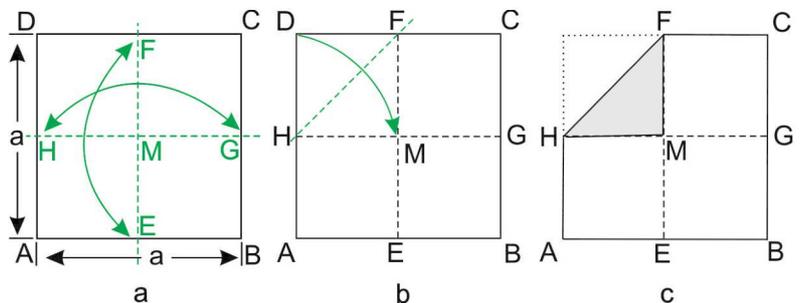


Bild 103

Flächeninhalt des Ausgangsquadrates um $\frac{3}{8}a^2$. Wir müssen also wieder einen Flächenanteil von $\frac{3}{8}a^2$ wegfallen, damit wir eine Figur mit halbem Flächeninhalt im Vergleich zum Ausgangsquadrat

erhalten. Auch hier sind wieder verschiedene Varianten möglich.

Variante 1: Wir falten A auf AD und B auf BC so, dass die entsprechende Faltlinie LR von AB den Abstand h hat (Bild 104a).

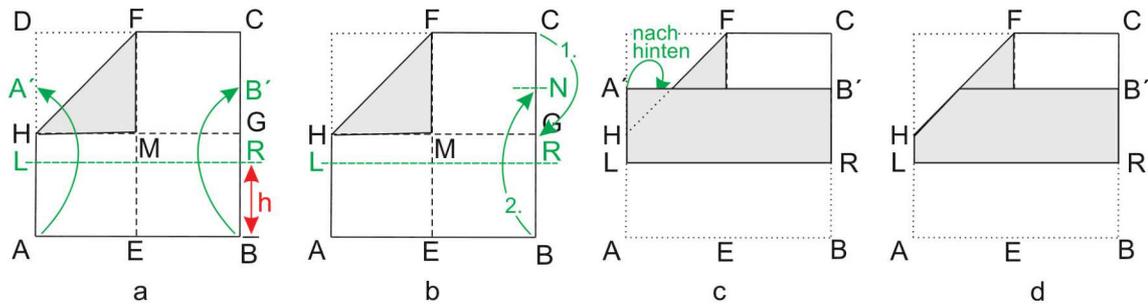


Bild 104

Dann muss der Flächeninhalt des Rechtecks $ABRL$ die Größe $\frac{3}{8}a^2$ haben, damit eine Flächenhalbierung entsteht. Weil $|AB| = a$ ist, folgt sofort, dass $h = |AL| = |BR| = \frac{3}{8}a$ sein muss. Dieser Wert lässt sich leicht falten, wie im Bild 104b zu sehen ist. Zuerst falten wir den Mittelpunkt N von GC und dann B auf N , wobei die gesuchte Faltlinie LR entsteht. Falten wir nun noch vom umgefalteten Rechteck das überstehende Dreieck an HF um (Bild 104c), dann erhalten wir das Fünfeck $LRCFH$ (Bild 104d). Dieses Fünfeck hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$.

Variante 2: Wir falten A auf AD so, dass die entsprechende Faltlinie LR von AB den Abstand h hat und anschließend falten wir C auf CD so, dass die zugehörige Faltlinie ST von BC ebenfalls den Abstand h hat (Bild 105a). Bild 105b zeigt die fertige Faltung. Dabei ist B^* zusätzlich der Schnittpunkt von LR mit ST .

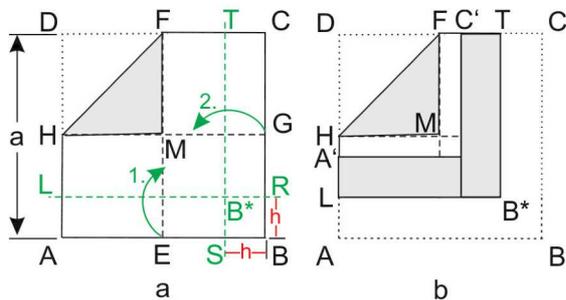


Bild 105

Wir berechnen nun h so, dass das Fünfeck LB^*TFH den Flächeninhalt $\frac{a^2}{2}$ hat. Dazu muss der Flächeninhalt von $ABCTB^*L$ gleich $\frac{3}{8}a^2$ sein (Bild 105a), d.h., es muss $ah + (a - h)h = \frac{3}{8}a^2$ gelten. Daraus ergibt sich für h die quadratische Gleichung $h^2 - 2ah + \frac{3}{8}a^2 = 0$. Diese Gleichung hat die beiden Lösungen $h_{1,2} = a \pm \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$. Weil $a + \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} > a$ ist, kommt für uns nur $h = a - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$ infrage.

Wie können wir aber diesen Wert für h durch Falten ermitteln? Wir versuchen die Kathetenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks so zu bestimmen, dass die Hypotenuse die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$ hat. Fündig werden wir mit den Längen $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $\frac{a}{4}\sqrt{2}$, denn es ist $\sqrt{(\frac{a}{2}\sqrt{2})^2 + (\frac{a}{4}\sqrt{2})^2} = a\sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{8}} = a\sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$.

$\frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $\frac{a}{4}\sqrt{2}$ haben für unser Faltquadrat mit der Seitenlänge a eine besondere Bedeutung, es sind nämlich die Längen einer halben bzw. einer viertel Diagonale des Quadrates. Daher falten wir in unser Faltquadrat $ABCD$ zuerst die beiden Diagonalen, die sich im Mittelpunkt M des Quadrates schneiden (Bild 106a).

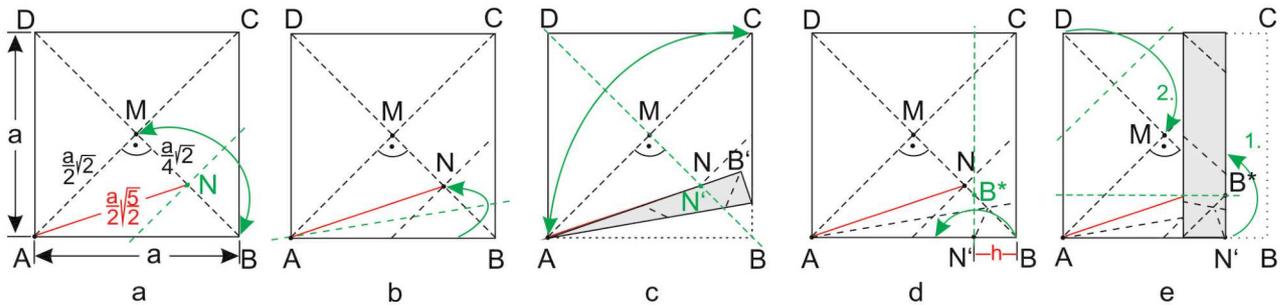


Bild 106

Wir falten B auf M und erhalten so den Mittelpunkt N von BM . Damit ist aber ANM das gesuchte rechtwinklige Dreieck mit $|AN| = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$. Nun müssen wir nur noch die Strecke AN von A aus auf AB abtragen, damit wir den gewünschten Wert h erhalten. Dazu falten wir AB so durch N , dass die Falte durch A geht (Bilder 106b und c). Jetzt falten wir die Figur an der Diagonalen BD und erhalten dadurch auf AB' den Punkt N' , für den $|AN'| = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$ gilt.

Nach dem Entfalten der Figur (Bild 106d) liegt N' auf AB und es ist $|N'B| = a - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} = h$.

Nun falten wir B so auf $N'A$, dass die Falte durch N' geht (Bild 106d). Dabei entsteht B^* als Schnittpunkt der Falte mit der Diagonalen BD . Nun falten wir N' auf $N'B^*$ so, dass die Falte durch B^* geht (Bild 106e). Abschließend falten wir noch D auf M .

Das fertige Ergebnis zeigt Bild 107. Der Flächeninhalt dieser Figur ist genau so groß wie die Hälfte des Flächeninhaltes des Ausgangsquadrates.

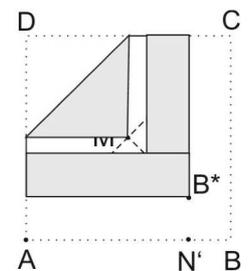


Bild 107

Variante 3: Nachdem wir von unserem Ausgangsquadrat $ABCD$ die Ecke D auf den Mittelpunkt M umgefaltet haben, falten wir nun noch B auf die Diagonale BD . LR ist die zugehörige Falte. Diese Falte ist senkrecht zu CD . Die Abstände von L und R zu B sind folglich gleich und wir bezeichnen diesen Abstand mit h (Bild 108a). Unsere Aufgabe ist es wieder das h so zu bestimmen, dass eine Figur mit halbem Flächeninhalt bezüglich des Ausgangsquadrates entsteht (Bilder 108b und c). Da das Dreieck LBR weggefaltet wird, muss $|LBR| = \frac{1}{2}h^2 = \frac{3}{8}a^2$ gelten. Daraus ergibt sich sofort $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

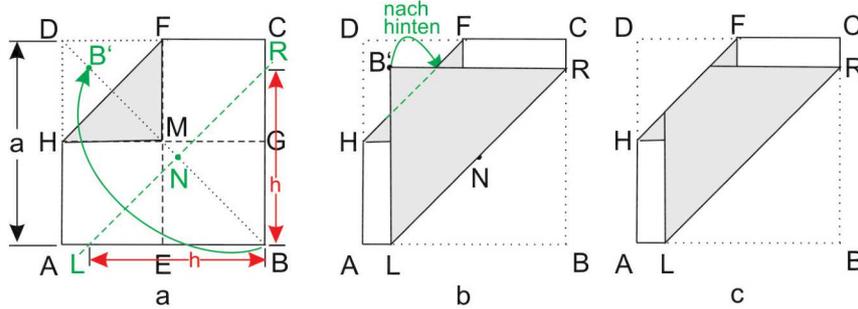


Bild 108

Wie können wir diesen Wert $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ durch Falten erzeugen? Dazu erinnern wir uns an das Kapitel 2.2.3, in dem es um das Falten von einem Winkel mit der Größe 60° ging. Dort trat unsere gesuchte Größe als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a auf (vgl. Bild 18).

Daher wissen wir auch sofort, wie wir hier beim Falten vorzugehen haben.

Wir starten mit dem Faltquadrat $ABCD$ in das die beiden Mittelparallelens GH und EF , sowie die Diagonale BD gefaltet sind (Bild 109a). Nach unseren Überlegungen aus Kapitel 2.2.3 falten wir jetzt C so auf GH , dass die Faltlinie durch B geht. T ist der Schnittpunkt dieser Faltlinie mit CD . Auf GH entsteht der Punkt C' , den wir z.B. mit einem Stift markieren oder wir falten D an $C'T$ um, bevor wir das Dreieck BCT wieder zurückfalten (Bild 109a). Nun ist $|C'G| = \frac{a}{2}\sqrt{3} = h$. Jetzt falten wir H so auf $C'G$, dass die Faltlinie durch C' geht. Diese Faltlinie schneidet AB in unserem gesuchten Punkt L und die Diagonale BD in B' (Bild 109b).

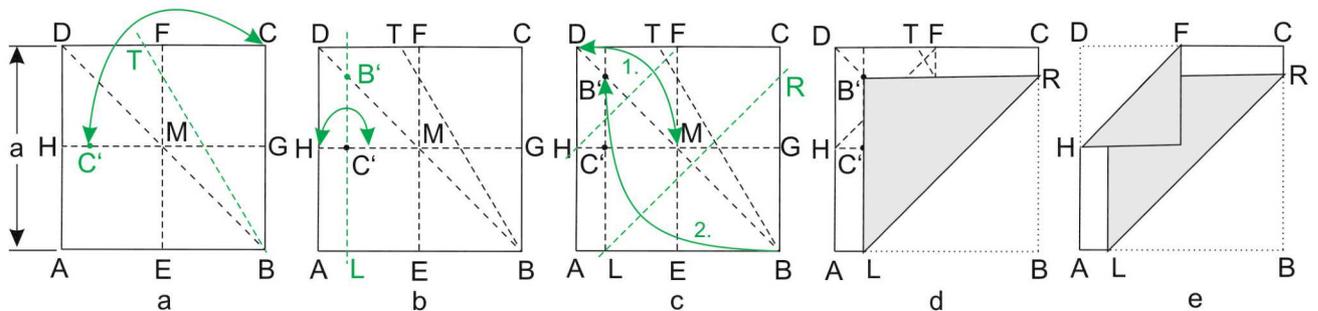


Bild 109

Jetzt falten wir zuerst D in M und wieder zurück. HF ist die zugehörige Faltlinie. Dann falten wir B auf B' (Bilder 109c und d). Die zugehörige Faltlinie geht durch L und schneidet BC in R . Zum Abschluss falten wir D an HF wieder um und erhalten das Sechseck $ALRCFH$, dessen Flächeninhalt halb so groß ist wie der des Ausgangsquadrates.

Variante 4: Wir starten wieder mit unserem Ausgangsquadrat $ABCD$, in dem die Mittelparallelens GH und EF eingefaltet sind. M ist auch hier der Mittelpunkt des Quadrates und D ist auf M gefaltet. Nun falten wir die beiden Diagonalen im Rechteck $ABGH$, die sich im Punkt N auf EF schneiden (Bild 110a). Wir berechnen den Flächeninhalt des Fünfecks $HNGCF$ und erhalten

$$|HNGCF| = |HMF| + |MGCF| + |HNG| = \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{2}a^2.$$

Damit ist das Fünfeck $HNGCF$ schon die gesuchte Figur mit dem halben Flächeninhalt bezüglich des Ausgangsquadrates.

Damit wir dieses Fünfeckes erhalten, falten wir die Ecken A und B gleichzeitig entlang HN bzw. GN nach oben. Dabei bringen wir auch E nach M . Beim Glättstreichen entstehen unter den umgefalteten Dreiecken HNA' und NGB' zwei weitere Faltlinien (Bild 110b).

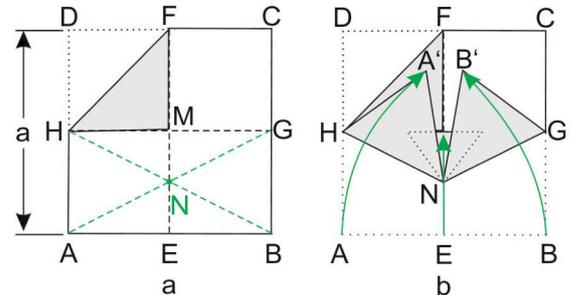


Bild 110

7.7 Und ein gleichseitiges Dreieck?

Beim flächenmäßigen Halbieren eines Quadrates haben wir ein gleichschenkliges Dreieck (vgl. Bild 69e), ein Quadrat (vgl. Bild 86c), Rechtecke (vgl. Bild 67b), allgemeine Vierecke, Fünf- und Sechsecke erhalten. Das regt zur Frage an: Können wir auch ein gleichseitiges Dreieck beim flächenmäßigen Halbieren eines Quadrates erzeugen?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. In dieses Quadrat zeichnen wir die Diagonale BD ein und bestimmen anschließend auf AD bzw. CD die Punkte E bzw. F , sodass $|\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle FBD| = 30^\circ$ ist (Bild 111a).

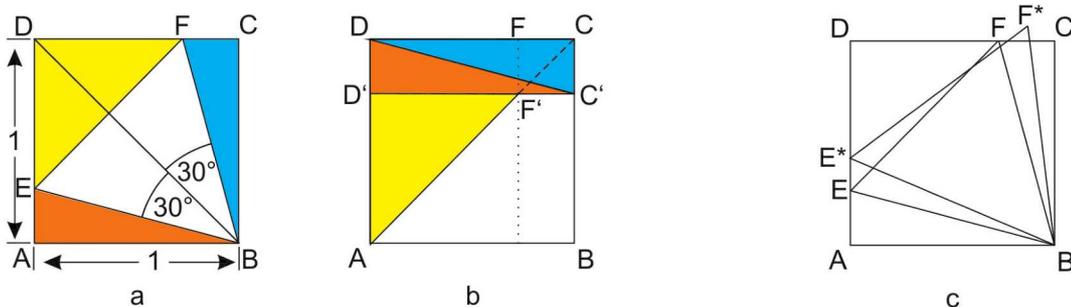


Bild 111: Ein gleichseitiges Dreieck im Quadrat

Dann sind die beiden Dreiecke BDE und BFD wegen (wsw) kongruent zueinander und es folgt $|EB| = |FB|$ und $|ED| = |FD|$. Damit ist EBF ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem der Innenwinkel in B die Größe 60° hat. Folglich ist EBF gleichseitig. Der Flächeninhalt dieses gleichseitigen Dreiecks ist allerdings kleiner als die Hälfte des Flächeninhaltes des Quadrates. Um dies einzusehen, betrachten wir die drei Dreiecke ABE , BCF und EFD und sortieren diese im Quadrat $ABCD$ um. Das gleichschenkligh-rechtwinklige Dreieck EFD verschieben wir so, dass E nach A geht. Dabei

geht D nach D' und F nach F' (Bild 111b). Nun wird das Dreieck EAB so verschoben, dass E nach D geht. Dabei geht natürlich A nach D' und das Bild von B bezeichnen wir mit C' . Dann ist klar, dass $C'CD \cong FCB$ ist. Folglich ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABE , BCF und EFD gleich dem Flächeninhalt des (nicht konvexen) Fünfecks $AF'C'CD$ und der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks EBF ist gleich dem Flächeninhalt des Vierecks $ABC'F'$.

Weil $\sphericalangle F'AD' = 45^\circ$ ist, geht die Verlängerung von AF' über F' durch C . Und folglich ist $|ABC'F'| < \frac{1}{2}|ABCD|$, d.h., $|EBF| < \frac{1}{2}|ABCD|$.

Das gleichseitige Dreieck EBF ist damit keine Lösung für unsere Ausgangsfrage. Deshalb fragen wir, ob es bezüglich EBF im Quadrat $ABCD$ ein flächengrößeres, gleichseitiges Dreieck gibt.

Diese Frage muss mit „Nein!“ beantwortet werden. Gäbe es nämlich im Quadrat $ABCD$ ein gleichseitiges Dreieck, dessen Fläche größer als die Fläche von EBF ist, dann müsste die Seitenlänge dieses Dreiecks größer als $|EB|$ sein. Außerdem müsste eine Ecke dieses Dreiecks in einer Ecke des Quadrates, etwa in der Ecke B , liegen. Bezeichnen wir mit E^* und F^* die anderen beiden Ecken dieses Dreiecks (Bild 111c), dann muss wegen $|E^*B| > |EB|$ der Punkt E^* auf ED liegen. Weil E^*BF^* gleichseitig ist, liegt F^* außerhalb des Quadrates $ABCD$. Folglich ist EBF das flächengrößte gleichseitige Dreieck, das man in das Quadrat $ABCD$ einbeschreiben kann. Da dessen Flächeninhalt aber kleiner als die halbe Quadratfläche ist, gibt es in $ABCD$ kein gleichseitiges Dreieck der gesuchten Art.

Unabhängig von den bisherigen Überlegungen lässt sich das Dreieck EBF aus Bild 111a in das Quadrat $ABCD$ falten. Bild 112 zeigt die Faltfolge. Zuerst falten wir die beiden Mittelparallelen LR und UV in das Quadrat.

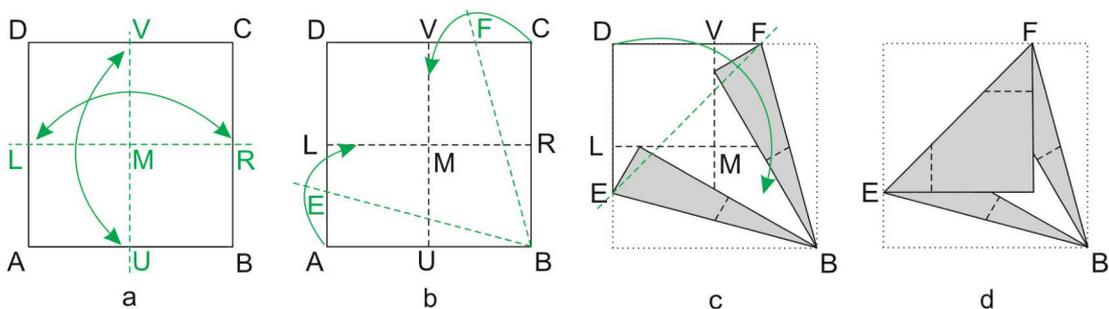


Bild 112: Faltfolge für ein flächengrößtes gleichseitiges Dreieck im Quadrat.

Dann wird A so auf LR und C so auf UV gefaltet, dass die beiden Faltlinien durch B gehen. Dabei entstehen die Punkte E und F auf AD bzw. CD . Zum Abschluss wird noch D an EF umgefaltet. EBF ist dann ein gleichseitiges Dreieck, das so im Quadrat $ABSD$ liegt, wie es Bild 111a zeigt.

7.8 Weiterführende Fragestellungen

Das flächenmäßige Halbieren eines Quadrates lässt sich gut auf die analoge Fragestellung für Rechtecke übertragen. So können wir beliebige Rechtecke oder solche mit speziellen Seitenverhältnissen ($1 : \sqrt{2}$, $1 : \sqrt{3}$, goldene Rechtecke, ...) untersuchen. In Anlehnung an 7.7 können wir fragen: Welches Seitenverhältnis muss ein Rechteck haben, damit ein eingefaltetes gleichseitiges Dreieck den halben Flächeninhalt vom Rechteck hat?

8 Der Thalesatz und der Satz von Pythagoras

Jetzt sollen der Thalesatz und der Satz des Pythagoras bewiesen werden, wobei auch wieder die Arbeit mit Papier im Zentrum steht.

8.1 Der Thalesatz

Der Thalesatz kann mit Hilfe eines halbkreisförmigen Faltpapiers entdeckt und anschließend gleich bewiesen werden. Dazu müssen wir uns halbkreisförmiges Faltpapier (etwa $r = 5\text{cm}$) zurechtschneiden. A und B bezeichnen die Endpunkte des Durchmessers des Halbkreises und M den Mittelpunkt von AB . Diesen Mittelpunkt können wir leicht durch Falten von A auf B ermitteln (Bild 113a). Anschließend markieren wir auf der Peripherie des Halbkreises einen beliebigen Punkt P . Nun falten wir A und B nach P . Die beiden zugehörigen Faltpapierlinien gehen natürlich durch den Mittelpunkt von M von AB und bestimmen die Punkte E und F auf der Halbkreisperipherie. Das Ergebnis ist im Bild 113b zu sehen. Im Bild 113c sehen wir den wieder aufgefalteten Halbkreis. Dort sind zusätzlich die Verbindungen von A und B mit P eingezeichnet (oder gefaltet). Diese Verbindungen schneiden ME in G und MF in H . Nun fragen wir nach der Größe des Innenwinkels des Vierecks $MHPG$ bei P .

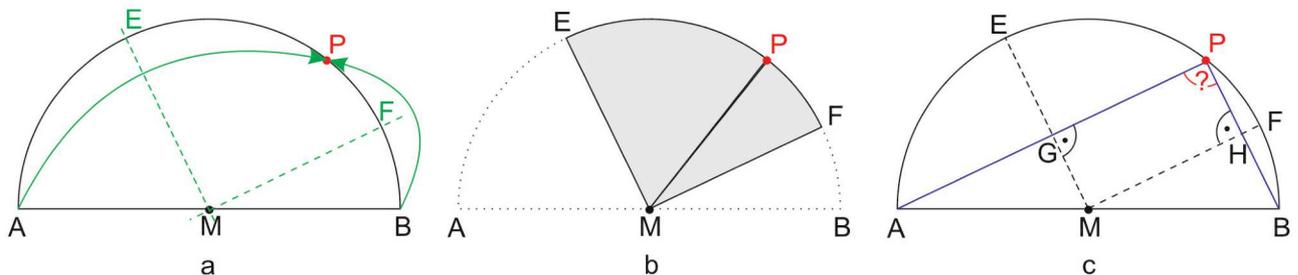


Bild 113: Der Thalesatz.

Aufgrund der Faltung von A nach P ist ME die Mittelsenkrechte von AP . Analog ist MF die Mittelsenkrechte von BP . Folglich hat das Viereck $MHPG$ bei G und H rechte Innenwinkel. Aus Bild 113b entnehmen wir, dass $|\sphericalangle FME| = 90^\circ$ sein muss, denn nach dem Falten liegen zwei Papierschichten übereinander und der ursprüngliche Winkel $\sphericalangle BMA$ hatte eine Größe von 180° . Damit ist der Innenwinkel bei M im Viereck $MHPG$ ebenfalls ein rechter Winkel. Da die Winkelsumme in einem Viereck aber 360° beträgt, muss nun $|\sphericalangle APB| = 90^\circ$ sein. Damit haben wir aber den **Satz des Thales**

Jeder Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Halbkreises ist ein rechter Winkel.

gefunden und gleichzeitig bewiesen.

8.2 Der Satz des Pythagoras

Zum Satz des Pythagoras knüpfen wir an Kapitel 7.4 an. Dort hatten wir am Ende nach der Länge einer Diagonalen in einem Quadrat mit der Seitenlänge a gefragt. Die Bestimmung dieser Länge gelang ohne Benutzung des Satzes des Pythagoras. Wir fragen jetzt, wie in Kapitel 7.4 angekündigt, nach der Länge der Diagonalen in einem Rechteck mit den Seitenlängen a und b (Bild 114a).

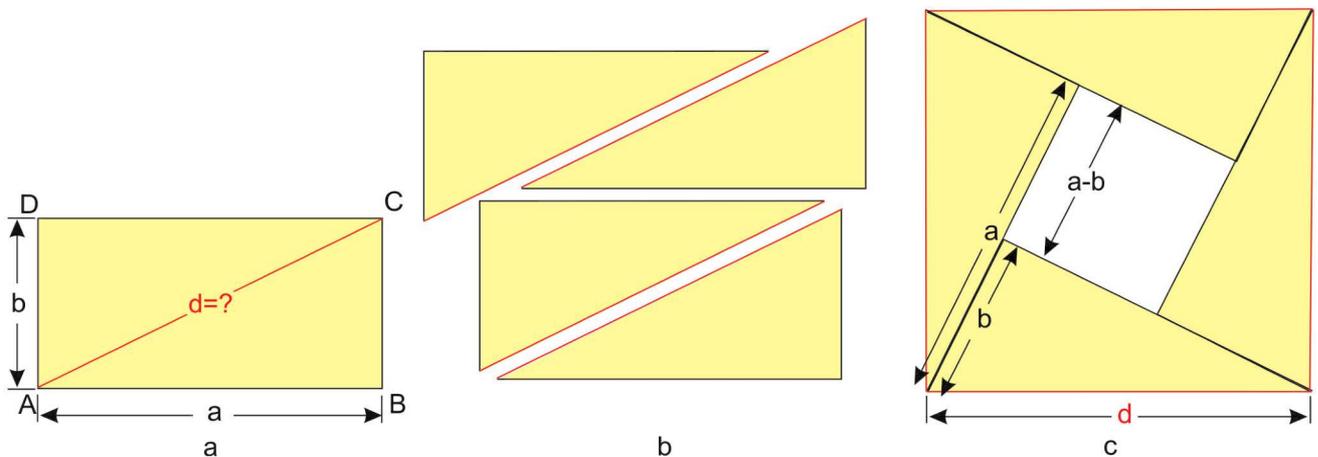


Bild 114: Der Satz des Pythagoras.

In Analogie zu Kapitel 7.4 können wir aus zwei zueinander kongruenten Rechtecken vier rechtwinklige und untereinander kongruente Dreiecke machen (Bild 114b). Will man daraus wieder ein Quadrat mit der Seitenlänge d zusammensetzen, so wird das nicht gelingen. Es gelingt nur ein Quadrat mit der Seitenlänge d , in dem im Innern eine kleine quadratische Fläche frei bleibt. (Bild 114c). Nun können wir rechnen: $d^2 = 2ab + (a - b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$. Damit gilt:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe aus den Quadraten der Kathetenlängen gleich dem Quadrat der Länge der Hypotenuse.

Das ist der **Satz des Pythagoras**, der hiermit gefunden und bewiesen wurde.

Einen anderen Zugang zum Satz des Pythagoras wird in [20], S.43, beschrieben. Ausgangspunkt ist ein quadratisches Faltpapier $ABCD$ mit der Kantenlänge a (Bild 115a).

Zuerst übertragen wir die Größe des Faltpapiers zweimal (nebeneinander) auf ein Zeichenblatt oder in unser Arbeitsheft (Bild 117a).

Nun wird gefaltet: Wir falten A auf C und dann wird B so umgefaltet, dass B' auf BC^+ zu liegen kommt. Die zugehörige Faltlinie ist EF (Bilder 115b - c). Als nächstes falten wir D auf den Schnittpunkt von DC mit EB' . Die zugehörige Faltlinie geht durch E . G ist der Schnittpunkt dieser Faltlinie mit DC (Bild 115d). Nun wenden wir die gefaltete Figur und falten die Diagonale FG in beide Schichten des Rechtecks $CFEG$.

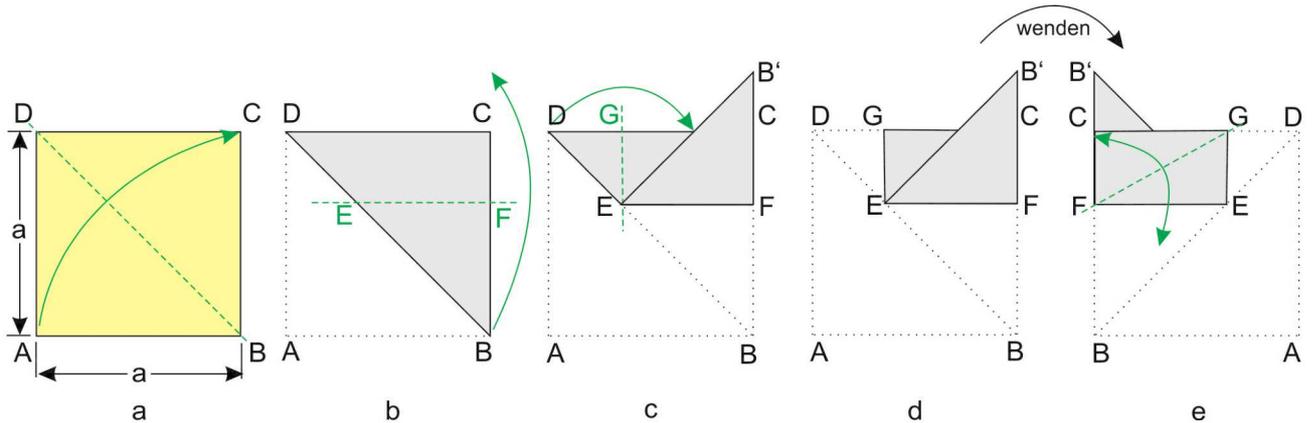


Bild 115: Faltfolge zum Satz des Pythagoras.

Als nächstes falten wir die Figur wieder zum Quadrat auseinander (Bild 116a). Wir zerschneiden das Faltpapier entlang der waagerechten und senkrechten Faltlinien durch E und die beiden Rechtecke entlang der gefalteten Diagonalen. Das Ergebnis zeigt Bild 116b. Es entstehen zwei Quadrate mit den Seitenlängen u und v sowie vier zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Kathetenlängen u und v und der Hypotenusenlänge w .

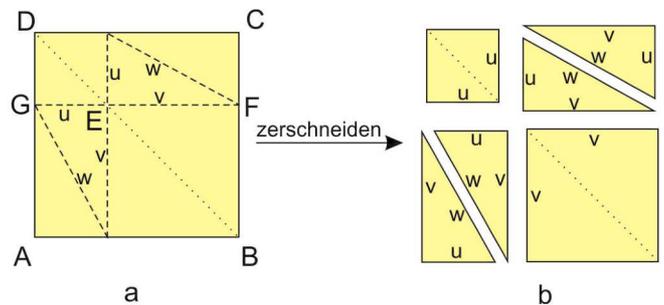


Bild 116

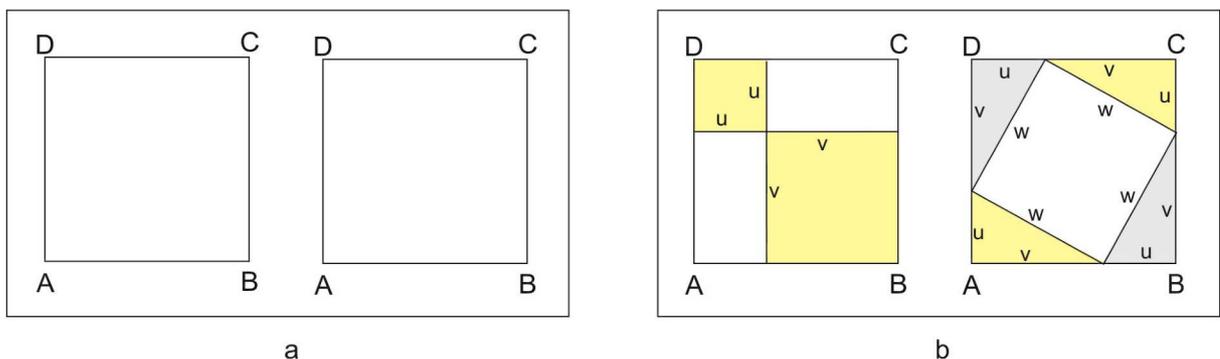


Bild 117: Der Satz des Pythagoras.

Jetzt werden die Teilstücke in unsere beiden leeren Quadrate (Bild 117a), die wir in unserem Heft vorbereitet haben, geklebt.

In das linke Quadrat kommen die beiden kleinen Quadrate so, wie sie ursprünglich in unserem Faltpapier angeordnet waren und wie es im Bild 117b (links) zu sehen ist. Die vier kongruenten rechtwinkligen Dreiecke werden in das rechte, noch leere Quadrat eingeklebt, wie es im Bild 117b (rechts) zu sehen ist.

Nun sind wir schon fertig. Wir betrachten die beiden gleichgroßen, teilweise beklebten Quadrate (Bild 117b). Im linken Quadrat sind vier zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke weggenommen und in das rechte Quadrat eingeklebt worden. Nun bleiben im linken Quadrat zwei Quadrate mit den Seitenlängen u und v übrig. Im rechten Quadrat wird von den vier eingeklebten Dreiecken ein Quadrat mit der Seitenlänge w gebildet. Nehmen wir diese vier Dreiecke auch weg, so bleibt nur das Quadrat mit der Seitenlänge w übrig. Da die beiden Ausgangsquadrate aber flächengleich sind, muss $u^2 + v^2 = w^2$ gelten.

Da u , v und w die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind, haben wir auch hier den Satz des Pythagoras gefunden und gleichzeitig auch bewiesen.

Will man diese Faltung zum Satz des Pythagoras praktisch durchführen, so sollte man einfarbiges Faltpapier benutzen. Dann gibt es nämlich keinen Farbunterschied zwischen Vorder- und Rückseite der Dreiecke wie im Bild 117b (rechts) zu sehen.

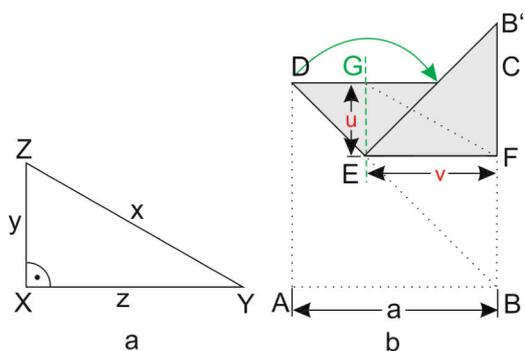


Bild 118

Abschließend sei noch erwähnt, dass die Faltlinie EF (Bilder 115b und c) immer so gewählt werden kann, dass das rechtwinklige Dreieck EFG ähnlich zu einem vorgegebenen rechtwinkligen Dreieck ist. Ist nämlich XYZ ein beliebig vorgegebenes rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen y und z (Bild 118a), so müssen wir die Kathetenlängen u und v von EFG (Bild 118b) so bestimmen, dass $\frac{y}{z} = \frac{u}{v}$ ist. Bedenken wir aber, dass $u = a - v$ ist, muss $\frac{y}{z} = \frac{a-v}{v} = \frac{a}{v} - 1$ gelten. Daraus ergibt sich $\frac{a}{v} = \frac{y}{z} + 1 = \frac{y+z}{z}$ bzw. $v = \frac{z}{y+z}a$.

Weil $0 < \frac{z}{y+z} < 1$ ist, ist $0 < v < a$. Folglich können wir die Faltlinie EF immer so bestimmen, dass $EFG \sim XYZ$ ist. Mit dieser Überlegung wird unser Faltbeweis allgemeingültig.

9 Der Satz von Haga

Wir falten ein quadratisches Blatt Papier $ABCD$ (Bild 119a) so, dass die Ecke B auf dem Mittelpunkt B' von CD zu liegen kommt (Bild 119b).

Betrachten wir nun die drei entstandenen rechtwinkligen Dreiecke, die im Bild 119c schraffiert sind, so können wir feststellen, dass diese drei Dreiecke ähnlich zueinander sind und sich die Seiten in jedem Dreieck wie $3 : 4 : 5$ verhalten.

Diese Tatsache wird in der Literatur als *Satz von Haga* bezeichnet und geht auf HAGA KAZUO, einen japanischen Biologen zurück, der auch als Vater des mathematischen Papierfaltens gilt.

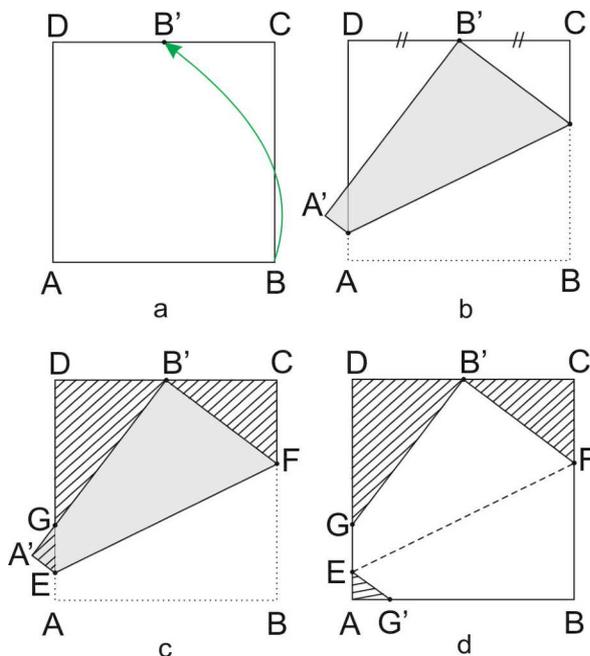


Bild 119

In [13] wird auf diesen Satz ebenfalls hingewiesen, der Beweis wird jedoch dem Leser überlassen. Wir wollen hier einen Beweis des Satzes angeben und dabei die Beziehungen zur Ähnlichkeitslehre und zum Satz des Pythagoras verdeutlichen. Zusätzlich wird sich über einen weiteren Gedankengang eine Ergänzung (siehe Kapitel 12) zum Satz von Haga ergeben.

Zuerst zeigen wir jedoch, dass die drei Dreiecke zueinander ähnlich sind. Dazu bezeichnen wir die Faltlinie, die beim Falten von B zum Mittelpunkt B' von CD entsteht mit EF und den Schnittpunkt von $A'B'$ mit AD mit G .

Es ist $A'EG \sim DGB'$, weil beide Dreiecke rechtwinklig sind und $|\sphericalangle A'GE| = |\sphericalangle B'GD|$ (Scheitelwinkel) gilt.

Es ist $DGB' \sim CB'F$, weil beide Dreiecke rechtwinklig sind und $|\sphericalangle FB'C| = |\sphericalangle B'GD|$ ist. Die letzte Winkelbeziehung ergibt sich daraus, dass aufgrund

der durchgeführten Faltung $|\sphericalangle GB'F| = 90^\circ$ ist. Damit ist aber $|\sphericalangle FB'C| + |\sphericalangle DB'G| = 90^\circ$. Da weiterhin im rechtwinkligen Dreieck DGB' auch $|\sphericalangle DGB'| + |\sphericalangle DB'G| = 90^\circ$ ist, folgt die behauptete Winkelbeziehung. Damit sind aber die drei betrachteten Dreiecke ähnlich zueinander.

Nun zeigen wir, dass sich die Seiten in den Dreiecken wie $3 : 4 : 5$ verhalten. Dazu nehmen wir an, dass das Ausgangsquadrat die Seitenlänge 1 hat und berechnen diesbezüglich die Längen der Dreiecksseiten, woraus sich dann die Behauptung ergibt.

Im Bild 119d ist das aufgefaltete Quadrat zu sehen, in dem die betrachteten Dreiecke und die

Faltlinie EF eingezeichnet sind. Zur Berechnung der Seitenlängen der Dreiecke bezeichnen wir diese entsprechend dem Bild 120. Weil B' Mitte von DC ist, ist $u = s = \frac{1}{2}$.

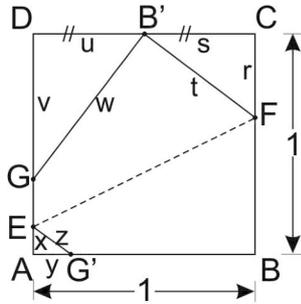


Bild 120

Im Dreieck $CB'F$ gilt mit dem Satz des Pythagoras $t^2 = s^2 + r^2$ also $t^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + r^2$.

Wegen der Faltung ist $t = |BF| = 1 - r$, womit $(1 - r)^2 = \frac{1}{4} + r^2$, also $r = \frac{3}{8}$ folgt.

Damit wird aber $t^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{64} = \frac{25}{64}$, womit $t = \frac{5}{8}$ folgt. Damit ergibt sich aber sofort die Behauptung:

$r : s : t = \frac{3}{8} : \frac{1}{2} : \frac{5}{8} = \frac{3}{8} : \frac{4}{8} : \frac{5}{8} = 3 : 4 : 5$ für Dreieck $CB'F$. Wegen der Ähnlichkeit zu den anderen beiden Dreiecken gilt dieses Seitenverhältnis auch für diese, und der Satz von Haga ist bewiesen.

Zur Vervollständigung berechnen wir noch die Seitenlängen der anderen beiden Dreiecke.

Im Dreieck DGB' ist $u = \frac{1}{2}$ und mit $u : v : w = 3 : 4 : 5$ folgt über $\frac{1}{2} = \frac{3}{4}v$, also $v = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2} = \frac{3}{5}w$, also $w = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

Damit ist $u = \frac{1}{2}, v = \frac{2}{3}$ und $w = \frac{5}{6}$.

Zur Berechnung der Seitenlängen im Dreieck $AG'E$ bedenken wir, dass wegen der Faltung $|G'B| = |G'B'| = w = \frac{5}{6}$ ist. Folglich ist $y = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

Weil $\frac{1}{6} = \frac{4}{5}z$ gilt, ergibt sich $z = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{24}$ und da $\frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{4}$ gilt, ergibt sich $x = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$, also finden wir $x = \frac{1}{8}, y = \frac{1}{6}$ und $z = \frac{5}{24}$.

Aus den bisherigen Betrachtungen ergibt sich mit $v = \frac{2}{3}$, dass $|AG| = \frac{1}{3}$ ist. Damit können wir feststellen, dass der Mittelpunkt von DG und G (Bild 120) die Quadratseite AD dritteln.

Die Faltung beim Satz von Haga ermöglicht es uns also sehr leicht, eine Seite des Ausgangsquadrates zu dritteln.

10 Drittelung eines DIN-A4 Blattes

Will man ein DIN-A4 Blatt in einen länglichen Briefumschlag stecken, ist es notwendig, dass wir das Blatt in Längsrichtung dritteln. Briefbögen haben dazu oft eine Markierung am linken Rand. Fehlt diese Markierung, so können wir die Länge des Blattes messen, diese Länge durch drei teilen und anschließend entsprechend das Blatt falten. Oder wir bestimmen den Drittelungspunkt am Blattrand direkt durch Abmessen am Briefumschlag. Wir wollen das Dritteln aber mathematisch erledigen und überlegen uns mehrere Varianten.

Variante 1: Im Kapitel 9 haben wir den *Satz von Haga* kennengelernt. Speziell konnten wir damit die Seite eines Quadrates dritteln. Dies können wir auf das Dritteln der kurzen Rechteckseite übertragen. In den Bildern 121a - g wird das Vorgehen gezeigt.

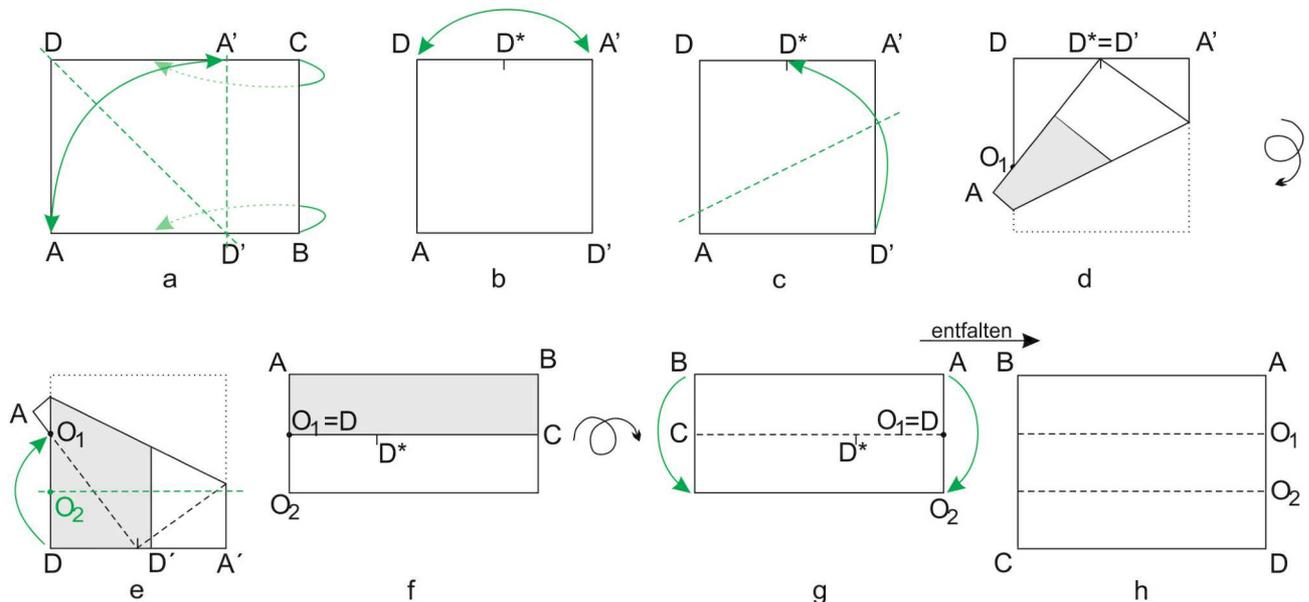


Bild 121

Zuerst wird ein Quadrat mit der Seite AD gefaltet. A' und D' sind die neuen Ecken. Dann wird BC an $A'D'$ nach hinten gefaltet (Bild 121a). Anschließend halbieren wir DA' durch Falten, wobei der Mittelpunkt D^* entsteht. Dann wird Ecke D' auf D^* gefaltet. Die umgefaltete Kante AD' schneidet die Quadratseite AD in O_1 (Bild 121d). Nach dem *Satz von Haga* ist $|DO_1| = \frac{2}{3}|AD|$. Zur praktischen Ausführung der Drittelung der Seite AD wenden wir das Blatt und falten D auf O_1 (Bild 121e). Die entstehende Falte schneidet AD in O_2 . Nun wird das gesamte Rechteck wieder entfaltet und die Faltung D auf O_1 erneuert. Nach nochmaligem Wenden, wird die obere Kante auf die untere gefaltet und das DIN-A4 Blatt ist quer gedrittelt (Bild 121h).

Als Nächstes lässt sich die Dreiteilung der Strecke AD mit Hilfe des Strahlensatzes auf die lange

Rechteckseite AB übertragen (Bild 122a - e).

Dazu legen wir das Blatt im Hochformat vor uns und falten die Faltnie durch B und D (Bild 122a). Anschließend falten wir D so auf die Faltnie BD , dass die neue Faltnie durch A geht. Diese Faltnie schneidet BD in W , und in W entsteht ein rechter Winkel. Nun wird A auf AW so gefaltet, dass die Faltnie durch O_2 geht. Diese Faltnie ist zu BD parallel und schneidet BA in L_2 (Bild 122c). Jetzt wird noch A so auf AW gefaltet, dass die Faltnie durch O_1 geht. Auch diese Faltnie ist parallel zu BD , schneidet aber BA in L_1 (Bild 122d). Aufgrund des Strahlensatzes (mit dem Zentrum A) dritteln die Punkte L_1 und L_2 die Seite BA des gegebenen DIN-A4 Blattes. Es müssen nur noch die beiden Drittelungslinien durch diese beiden Punkte parallel zu BC gefaltet werden (Bild 122e). Und schon kann das DIN-A4 Blatt in einen langen Briefumschlag gesteckt werden.

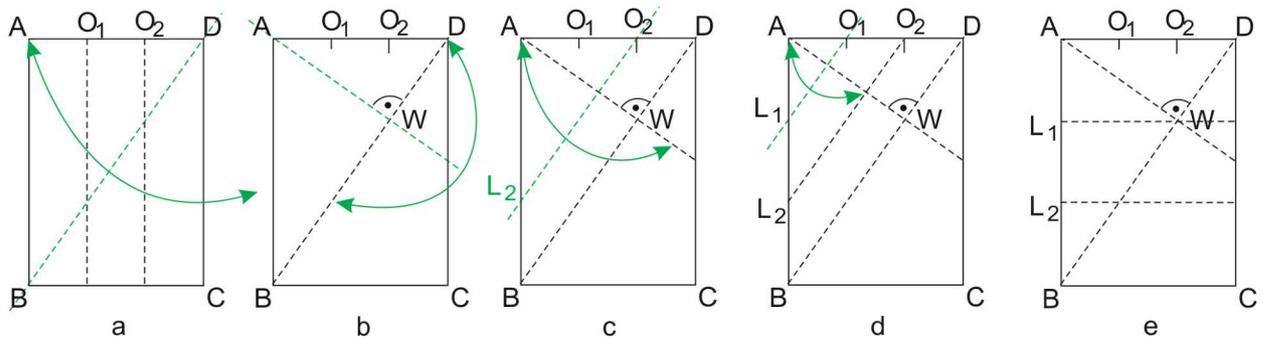


Bild 122

Diese Faltkonstruktion können wir übrigens für beliebiges rechteckiges Papier verwenden, da wir an keiner Stelle die Eigenschaften eines DIN-A4 Blattes verwendet haben.

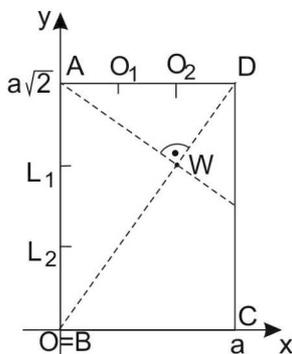


Bild 123

Variante 2: Beim Falten des letzten Schrittes (Bild 122e) im DIN-A4 Blatt sieht es so aus, als ob durch W zwei Drittelungslinien verlaufen. Wenn dies richtig ist, also nicht nur aufgrund von Faltungenaugigkeiten so aussieht, können wir uns das Dritteln eines DIN-A4 Blattes wesentlich vereinfachen. Der Punkt W entsteht nämlich bereits nach der zweiten Faltung.

Diese Vermutung soll nun untersucht werden.

Dazu legen wir das DIN-A4 Blatt in ein Koordinatensystem, wie es im Bild 123 gezeigt ist. Wir setzen voraus, dass die kurze Seite des DIN-A4 Blattes die Länge a hat, dann hat die lange Seite die Länge $a \cdot \sqrt{2}$.

Nun berechnen wir die Koordinaten von W , indem wir die W erzeugenden Geraden als Graphen

von linearen Funktionen auffassen.

Die Gerade durch O und W hat die Gleichung $y = \frac{a\sqrt{2}}{a}x = \sqrt{2}x$.

Die dazu senkrechte Gerade durch W hat die Gleichung $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + a\sqrt{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}x + a\sqrt{2}$.

Durch Gleichsetzen folgt $\sqrt{2}x_W = -\frac{1}{2}\sqrt{2}x_W + a\sqrt{2}$, woraus sich $x_W = \frac{2}{3}a$ ergibt. Damit folgt aber $y_W = \frac{2}{3}\sqrt{2}a$ und insgesamt $W(\frac{2}{3}a; \frac{2}{3}\sqrt{2}a)$. Folglich geht die Parallele zur y-Achse durch O_2 und die Parallele zur x-Achse durch L_1 durch den Punkt W .

Damit können wir nun eine verkürzte Faltanleitung zum Dritteln der langen Seite eines DIN-A4 Blattes angeben. Sie ist in den Bildern 124a - e dargestellt.

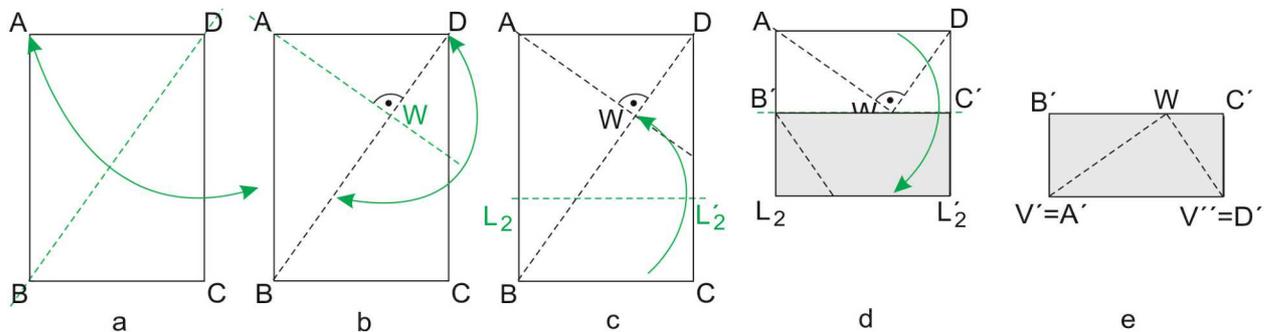


Bild 124

Wir falten zuerst die Diagonale BD (Bild 124a) und dann die Senkrechte von A auf diese Diagonale (Bild 124b). W ist der Schnittpunkt dieser beiden Faltnissen. Nun müssen wir nur noch BC so umfalten, dass die umgefaltete Kante $B'C'$ durch W geht und B' bzw. C' auf BA bzw. CD liegen. L_2L_2' ist die zugehörige Faltnisse (Bild 124c).

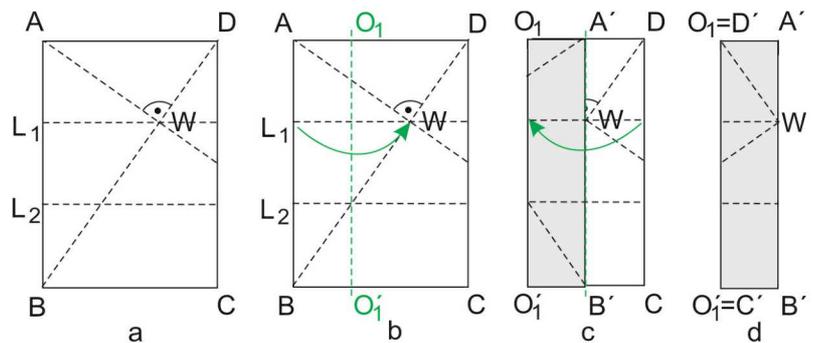


Bild 125

Dann falten wir nur noch AD an $B'C'$ um (Bild 124d) und erhalten das gedrittete DIN-A4 Blatt (Bild 124e).

Natürlich können wir das DIN-A4 Blatt mit der Hilfe von W auch bezüglich der kurzen Kante dritteln, wie wir den Bildern 125a - d entnehmen. Dabei stellt Bild 125a das entfaltete und bezüglich der Längskante gedrittete DIN-A4 Blatt aus Bild 124e dar.

Funktioniert diese Falttechnik nur für Ostwaldsche (also DIN-A) Rechtecke?

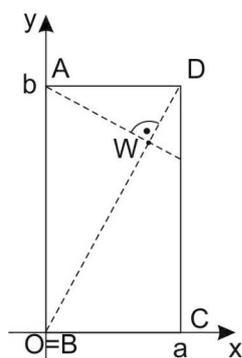


Bild 126

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b ($a \leq b$) und legen es in ein Koordinatensystem, wie es im Bild 126 zu sehen ist.

Dann hat die Gerade durch O und D die Gleichung $y = \frac{b}{a}x$.

Die Senkrechte dazu durch A hat die Gleichung $y = -\frac{a}{b}x + b$.

Da $W(x_W; y_W)$ auf beiden Geraden liegt, muss $\frac{b}{a}x_W = -\frac{a}{b}x_W + b$ gelten. Daraus ergibt sich $x_W = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$ und $y_W = \frac{b^3}{a^2+b^2}$. Damit ist klar, dass W nicht immer eine Dreiteilung des Rechtecks liefert.

Wir fragen nun nach dem Verhältnis von b und a , sodass W eine Dreiteilung des Rechtecks erlaubt. Dazu setzen wir $x_W = \frac{2}{3}a$, also $\frac{ab^2}{a^2+b^2} = \frac{2}{3}a$. Daraus ergibt sich $\frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{2}{3}$ bzw. $\frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{3}{2}$ und daraus $(\frac{a}{b})^2 = \frac{1}{2}$ bzw. $(\frac{b}{a})^2 = 2$. Dies ergibt schließlich $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$. D.h., dass die hier verwendete Faltechnik tatsächlich nur für Ostwaldsche Rechtecke verwendet werden kann, um ein solches Rechteck in beide Richtungen zu dritteln.

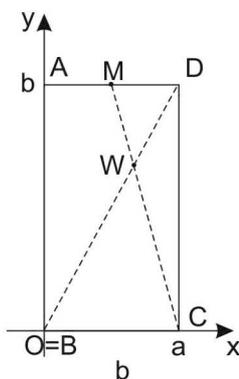
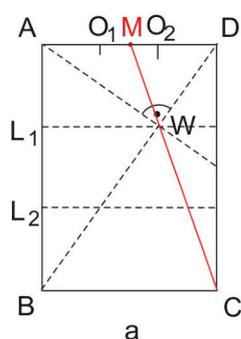


Bild 127

Variante 3: Experimentieren wir mit der Drittelung des DIN-A4 Blattes nach Variante 1 und versuchen noch weitere interessante Linien zu finden, die durch W im Bild 122e gehen, so können wir vermuten, dass die Verbindung von C mit dem Mittelpunkt M von DA durch W geht, wie es im Bild 127a zu sehen ist. Diese Vermutung muss natürlich überprüft werden.

Wir legen dazu ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b ($a \leq b$) so in ein Koordinatensystem, wie es Bild 127b zeigt.

Die Gleichung der Geraden durch B und D lautet $y = \frac{b}{a}x$.

Die Gleichung der Geraden durch C und M lautet $y = -\frac{b}{2}x + 2b = -2\frac{b}{a}x + 2b$.

Weil $W(x_W; y_W)$ auf beiden Geraden liegt, muss $\frac{b}{a}x_W = -2\frac{b}{a}x_W + 2b$ gelten. Daraus ergibt sich $x_W = \frac{2}{3}a$ und $y_W = \frac{2}{3}b$. Damit hat sich unsere Vermutung aus Bild 127a bestätigt und W als Schnittpunkt von BD mit CM eignet sich als Drittelungspunkt für beliebige Rechtecke und nicht nur für Ostwaldsche Rechtecke.

Variante 4: Jetzt nutzen wir die Tatsache, dass sich die Seitenhalbierenden in einem Dreieck im Verhältnis 1 : 2 teilen, d.h., der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist ein Drittelungspunkt der Seitenhalbierenden. Wenn es sich bei dem Dreieck um ein gleichseitiges Dreieck handelt, dann fallen Seitenhalbierende, Winkelhalbierende, Höhen und Mittelsenkrechte dieses Dreiecks zusammen.

Wie wir in einem rechteckigen Faltpapier ein gleichseitiges Dreieck bestimmen, wissen wir bereits (vgl. XXX). Entsprechend der Bilder 128a - e bestimmen wir das gleichseitige Dreieck BCC' , in dem S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist. S ist damit ein Drittelungspunkt von NC' . Mit E bezeichnen wir den Schnittpunkt der Faltlinie BC' mit AD . F ist der zugehörige Lotfußpunkt auf BC . Weiterhin ist S^* der Schnittpunkt von EF mit BB^* .

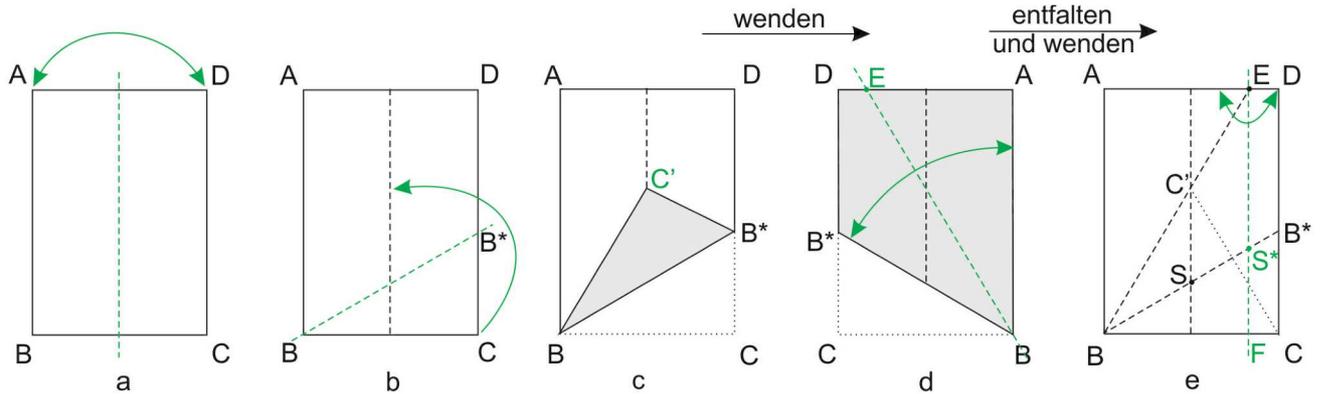


Bild 128

Dann geht das Dreieck BFE aus dem Dreieck BNC' durch eine Streckung mit dem Zentrum B hervor. Folglich ist S^* ein Drittelungspunkt von EF .

Wir müssen nun nur noch E auf S^* falten und erhalten die Faltlinie $L_1L'_1$ und dann C auf L'_1 , wobei die Faltlinie $L_2L'_2$ entsteht (Bild 129a). Diese beiden Faltlinien dritteln das Rechteck bezüglich der langen Seite. Einerseits setzt unsere Faltkonstruktion kein Ostwaldsches Rechteck voraus, aber andererseits funktioniert sie nur, wenn der Punkt E auf DA existiert. Daher ist das Rechteckformat nicht ganz beliebig. Für die Bestimmung der Grenzen für die Seitenlängen a und b des Rechtecks (Bild 129b) bedenken wir, dass $NC' = \frac{1}{2}\sqrt{3}a$, als Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a , ist. Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke BNC' und BFE folgt $\frac{|EF|}{\frac{1}{2}\sqrt{3}a} = \frac{|BF|}{|BN|}$ bzw. $\frac{b}{\frac{1}{2}\sqrt{3}a} = \frac{|BF|}{\frac{a}{2}}$. Daraus ergibt sich $|BF| = \frac{1}{3}\sqrt{3}b$.

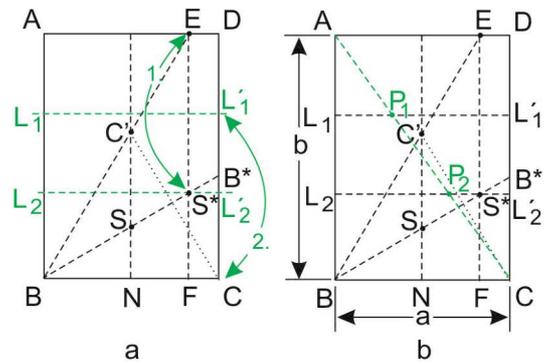


Bild 129

Damit muss also neben $a \leq b$ auch $\frac{1}{3}\sqrt{3}b \leq a$ gelten, damit die Faltkonstruktion nach Variante 4 ausführbar ist. Für das Verhältnis von a und b muss also insgesamt $\frac{1}{3}\sqrt{3} \leq \frac{a}{b} \leq 1$ bzw. $\sqrt{3} \geq \frac{b}{a} \geq 1$ gelten.

Um das Rechteck auch bezüglich der kurzen Kante zu dritteln, müssen wir nur die Diagonale AC falten, die $L_1L'_1$ in P_1 und $L_2L'_2$ in P_2 schneidet. Diese beiden Schnittpunkte geben die Drittelungs-

punkte bezüglich der kurzen Rechteckseite an. Die Begründung dafür liefert der Strahlensatz mit dem Zentrum A .

11 Kreise dritteln

Soll in einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Sechseck mit Hilfe von Zirkel und Lineal einbeschrieben werden, muss man den Radius des Kreises mit dem Zirkel sechsmal auf dem Rand des Kreises abtragen (Bild 130). Die Begründung für die Richtigkeit dieser Konstruktion folgt daraus, dass sich im Kreismittelpunkt M die Ecken von sechs regelmäßigen Dreiecken treffen. Da jeder Innenwinkel eines regelmäßigen Dreiecks die Größe 60° hat, wird der Vollwinkel um M durch diese sechs Dreiecke vollständig und ohne Überlappungen bedeckt.

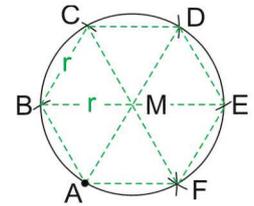


Bild 130

Nimmt man von diesen sechs Punkten auf dem Kreisrand jeden zweiten Punkt, so erhält man ein regelmäßiges Dreieck (Bild 131) welches dem Kreis einbeschrieben ist. Damit hat man auch eine Einteilung des Kreises in drei gleichgroße Sektoren erzeugt.

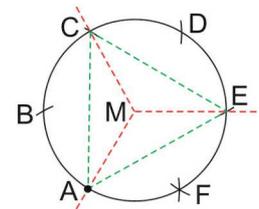


Bild 131

Nun nehmen wir kreisförmiges Faltpapier, das man sich z.B. aus einem anderen Faltpapier ausschneiden kann.

Zur Einteilung dieses kreisförmigen Blattes in drei bzw. sechs gleichgroße Sektoren, können wir auf die oben genannte Idee zurückgreifen. Die Bilder 132a - d zeigt das Vorgehen.

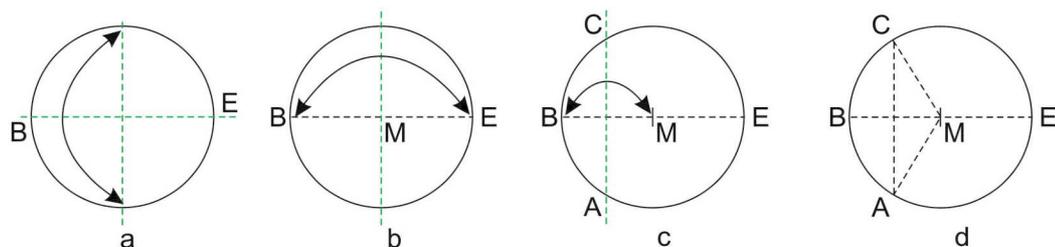


Bild 132: Der Faltprozess

Zuerst müssen wir den Mittelpunkt des Kreises bestimmen. Dazu wird der Kreis durch Falten halbiert. Der dadurch entstandene Kreisdurchmesser hat die Endpunkte B und E (Bild 132a). Nun falten wir B auf E und markieren nur die Faltung in einer kleinen Umgebung von BE (Bild 132b). Dadurch haben wir den Mittelpunkt M des Kreises gefunden. Falten wir jetzt B auf M (Bild 132c), so entsteht die Mittelsenkrechte von BM , die den Kreisrand in A und C trifft. Damit gilt aber

$|BC| = |MC| = r$ und $|BA| = |MA| = r$ (Bild 132d). Folglich entspricht das Falten der Mittelsenkrechten zu BM dem Abtragen des Kreisradiuses auf dem Kreisrand von B aus. Damit sind A , C und E drei Punkte, die den Kreisrand in drei gleichgroße Stücke zerlegen.

Falten wir nun noch die Faltnen von M zu A und zu C , so sind mit der Faltnen von M zu E drei gleichgroße Kreissektoren entstanden (Bild 133a).

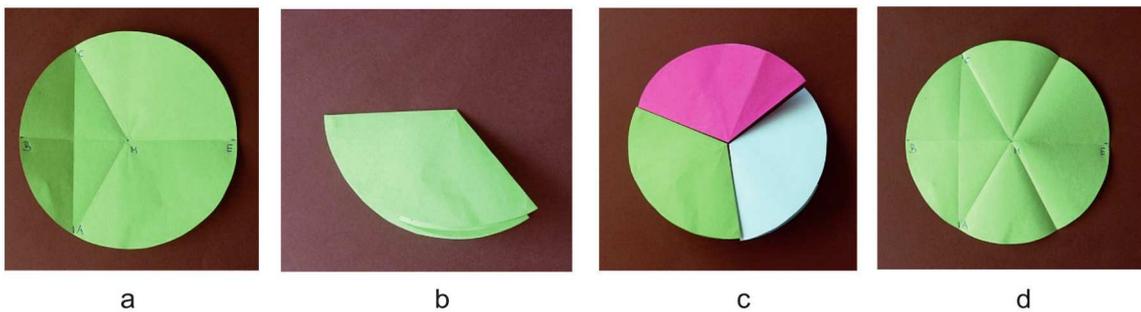


Bild 133

Falten wir nun die so vorbereitete Kreisscheibe entlang BE zusammen, wobei vorher die bisherige Talnfalte MB zu einer Bergfalte umgewandelt wird, so verschwindet MB im Inneren und so entsteht ein Kreissektor, der genau einem Drittel des Ausgangskreises entspricht (Bild 133b). Drei solche Sektoren lassen sich auch wieder zu einem ganzen Kreis zusammenlegen (Bild 133c).

Falten wir im kreisförmigen Papier (Bild 133a) die Linien MA und MC ganz durch den Kreis, so entsteht natürlich eine Einteilung des Kreises in sechs gleichgroße Sektoren. (Bild 133d).

12 Ergänzungen zum Satz von Haga

Hier greifen wir die Überlegungen zum Satz von Haga aus dem Kapitel 9 wieder auf, ergänzen ihn durch weitere Dreiecke, die dazu passen und verallgemeinern ihn in Bezug auf die Lage von B' auf CD .

12.1 Ein fehlendes Dreieck

Beim Satz von Haga (vgl. Kapitel 9) wurde von einem quadratischen Faltpapier $ABCD$ die Ecke B auf den Mittelpunkt von CD gefaltet. Dabei entstanden drei zueinander ähnliche rechtwinklige Dreiecke (siehe Bild 119), die sogar das Seitenverhältnis $3 : 4 : 5$ erfüllen. Diese Situation ist im Bild 134a noch einmal dargestellt. Wir hatten auch bereits die Längen der Seiten dieser drei Dreiecke berechnet und erhielten:

$$r = \frac{3}{8}, s = \frac{1}{2}, t = \frac{5}{8} \text{ und } u = \frac{1}{2}, v = \frac{2}{3}, w = \frac{5}{6} \text{ sowie } x = \frac{1}{8}, y = \frac{1}{6}, z = \frac{5}{24}.$$

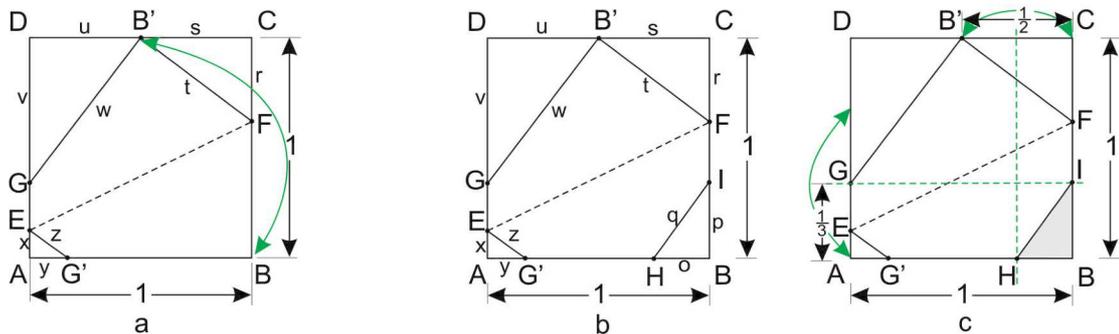


Bild 134

Nun berechnen wir die Ähnlichkeitsfaktoren λ_{AC} und λ_{AD} vom kleinen Dreieck $G'EA$ bezüglich $B'FC$ und bezüglich $GB'D$.

$$\text{Es gilt } \lambda_{AC} = \frac{t}{z} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{5}{24}} = \frac{3}{1} = 3 \text{ und } \lambda_{AD} = \frac{w}{z} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{24}} = \frac{4}{1} = 4.$$

Dieses Ergebnis wirft die Frage nach einem vierten Dreieck auf, das bezüglich $G'EA$ den Ähnlichkeitsfaktor 2 hat, noch dazu, dass in der Ecke B des Ausgangsquares noch kein Dreieck liegt. Ein solches Dreieck lässt sich jedoch leicht in die Figur (Bild 134b) einzeichnen. Dabei sollte die kurze Kathete auf AB und die lange auf BC liegen, damit es sich in die Anordnung der drei anderen Dreiecke einordnet.

Wir wählen H auf AB so, dass $|HB| = o = 2 \cdot x = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ und I auf BC so, dass $|BI| = p = 2 \cdot y = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ ist. Dann ist das Dreieck IHB zum Dreieck $G'EA$ ähnlich und der Ähnlichkeitsfaktor λ_{AB}

beträgt 2. Weiterhin ist $|HI| = q = 2 \cdot z = 2 \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{12}$. Die Seitenlängen dieses Dreiecks betragen damit $o = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}$ und $q = \frac{5}{12}$.

Die Punkte H und I lassen sich damit leicht bestimmen. Um H zu erhalten, falten wir C auf B' . Die entstehende Faltlinie schneidet AB in H . Falten wir A so auf GD , dass die Faltlinie durch G geht, dann schneidet diese Faltlinie BC in I . Damit haben wir das fehlende Dreieck schon festgelegt (Bild 134c).

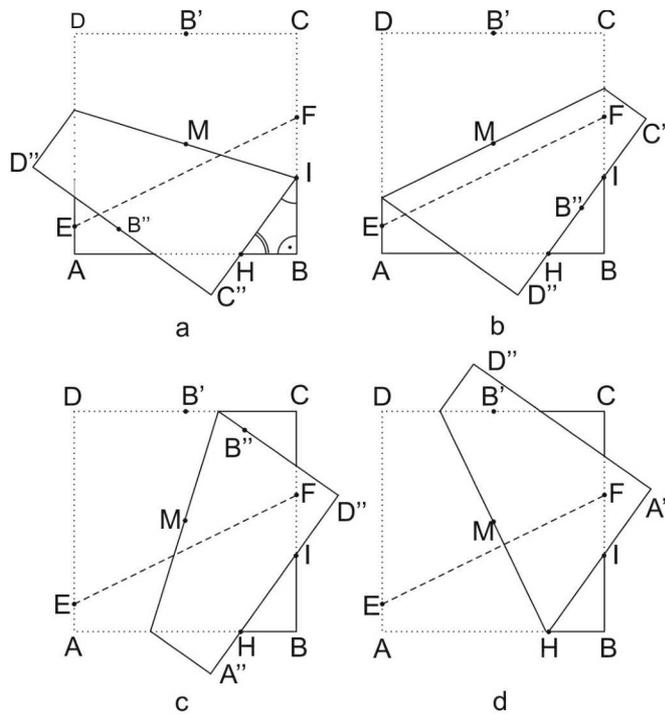


Bild 135

Nun fragen wir uns, ob es nicht auch möglich ist IH durch eine Faltung, analog zur vorhergehenden Faltung von B auf B' , zu erzeugen.

Wir nehmen zuerst an, dass wir H und I entsprechend der obigen Vorgaben bestimmt haben. Dann können wir das Quadrat $ABCD$ so falten, dass die jeweils umgefaltete Kante durch H und I geht. Diese vier Möglichkeiten sind in den Bildern 135a - d dargestellt: BC , CD , DA und AB gehen durch H und I .

In jedem der vier Bilder erkennen wir zusätzlich zum Dreieck IHB drei weitere Dreiecke, die zu IHB ähnlich sind. Dies sehen wir sofort über die Betrachtung der Innenwinkel in Analogie zum Satz von Haga. Wir zeigen sogar, dass diese Dreiecke untereinander kongruent sind.

Bevor wir mit den einzelnen Faltungen beginnen, markieren wir noch den Mittelpunkt M des Quadrates $ABCD$ und setzen voraus, dass die Kantenlänge dieses Quadrates immer 1 ist.

Wir falten zuerst BC durch H und I (vgl. Bild 135a).

Dabei geht D nach D'' und C nach C'' (Bild 136a). Die Faltlinie geht auf BC natürlich durch I und bestimmt auf AD den Punkt J . Außerdem bestimmt $C''D''$ auf AD den Punkt U und auf AB den Punkt V .

Die Dreiecke HVC'' , VUA und UJD'' sind ähnlich zum Dreieck IHB . Wir zeigen nun die Kongruenz dieser drei Dreiecke zu IHB .

Beginnen wir mit HVC'' und berechnen $|HC''|$. Es ist $|HC''| = 1 - |HI| - |BI| = 1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$. Damit ist aber $|HC''| = |HB|$ und folglich ist $HVC'' \cong IHB$. Damit ist auch $|C''V| = |BI| = \frac{1}{3}$

und $|VH| = \frac{5}{12}$.

Weil $|AV| = 1 - |VH| - |HB| = 1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ ist, ist auch $VUA'' \cong IHB$. Folglich ist $|AU| = \frac{1}{4}$ und $|VU| = \frac{5}{12}$.

Nun zeigen wir $UJD'' \cong IHB$. Es ist $|UJ| + |JD| = 1 - |AU| = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Andererseits ergibt sich wegen der Ähnlichkeit von UJD'' zu IHB aus dem Seitenverhältnis $\frac{|JD''|}{|UJ|} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{5}$ die Beziehung $|JD''| = \frac{4}{5}|UJ|$.

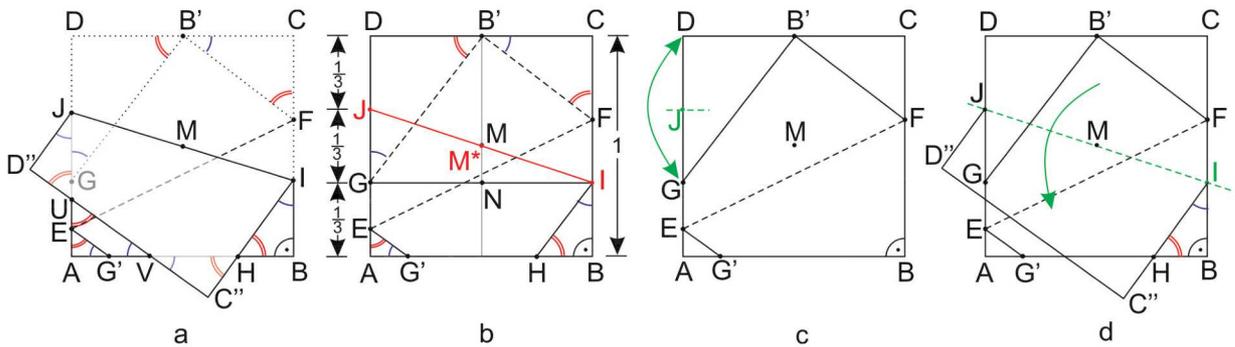


Bild 136

Wegen der durchgeführten Faltung ist $|JD''| = |JD|$, woraus $\frac{3}{4} = |UJ| + |JD| = |UJ| + |JD''| = |UJ| + \frac{4}{5}|UJ| = \frac{9}{5}|UJ|$ folgt. Also ist $|UJ| = \frac{5}{12}$ und folglich $UJD'' \cong IHB$.

Zusätzlich erhalten wir $|JD| = |JD''| = \frac{1}{3}$, $|UD''| = \frac{1}{4}$ und weil $|JD| = \frac{1}{3}$ ist, dritteln die Punkte G und J die Quadratseite AD .

Damit sind aber die bei der Faltung zusätzlich entstandenen drei Dreiecke kongruent zum Dreieck IHB und wir machen die Faltung rückgängig (Bild 136b). Dabei sehen wir, dass die Faltlinie IJ durch M geht. Dies wollen wir nun auch beweisen. Dazu bezeichnen wir den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von CD mit IJ mit M^* und den Schnittpunkt mit GI mit N . Weil $|AG| = \frac{1}{3}$ und $|JD| = \frac{1}{3}$ ist, ist auch $|GJ| = \frac{1}{3}$. Außerdem ist IJG bei G rechtwinklig, da $GI \parallel AB$ ist. Weil N der Mittelpunkt von GI ist, ist $|NM^*| = \frac{1}{6}$. Da $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ ist, ist $M^* = M$ und folglich geht IJ durch M wie behauptet.

Mit diesen Vorüberlegungen können wir in dem Quadrat $ABCD$, in dem nur die drei Dreiecke des Satzes von Haga markiert sind, das gesuchte vierte Dreiecke in der Ecke B bestimmen. Dazu falten wir zuerst D auf G und bestimmen damit den Mittelpunkt J von DG (Bild 136c). Dann falten wir das Quadrat so, dass die Faltlinie durch J und M geht (Bild 136d). Diese Faltlinie schneidet BC in I und wir finden H als Schnittpunkt von IC'' mit AB . IHB ist dann das gesuchte vierte Dreieck.

Es gibt eine weitere Faltmöglichkeit. Dazu falten wir wieder BC durch die vorher bestimmten Punkte H und I und betrachten zusätzlich das Bild B'' von B' bei dieser Faltung (Bild 137a).

Die zugehörige Faltlinie IJ geht durch dem Mittelpunkt M des Quadrates, wie vorher gezeigt. Außerdem dritteln J und G die Quadratkante AD . Weil B'' der Bildpunkt von B' bei der Faltung an IJ ist, ist $B'B'' \perp IJ$. Bezeichnen wir noch den Schnittpunkt von $B'B''$ mit IJ mit L und den Fußpunkt des Lotes von B' auf IG mit N , dann sind die beiden Dreiecke $B'ML$ und IMN ähnlich zueinander, da beide Dreiecke rechtwinklig sind und die Innenwinkel bei M Scheitelwinkel sind. Folglich gilt auch $|\angle MB'L| = |\angle NIM|$.

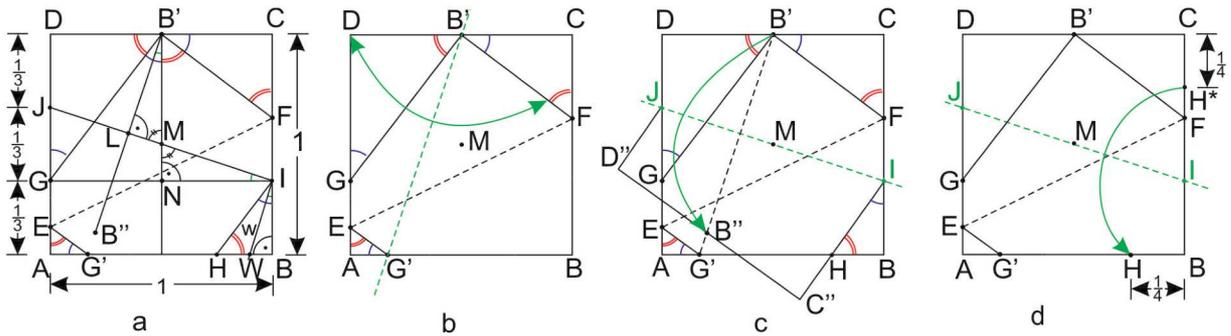


Bild 137

Wir zeigen nun, dass $|\angle GIJ| = |\angle NIM| = \frac{1}{2}|\angle BIH|$ gilt.

Dazu zeichnen wir im Dreieck IHB die Winkelhalbierende w des Winkels $\angle BIH$ ein, die HB in W schneidet. Weil W die Seite HB im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, gilt $\frac{|HW|}{|WB|} = \frac{5/12}{1/3} = \frac{5}{4}$. Da $|HW| = \frac{1}{4} - |WB|$ ist, folgt $\frac{1/4 - |WB|}{|WB|} = \frac{5}{4}$, woraus $|WB| = \frac{1}{9}$ folgt.

Im Dreieck IWB folgt damit $\frac{|WB|}{|BI|} = \frac{1}{3}$ und im Dreieck JGI ergibt sich $\frac{|JG|}{|GI|} = \frac{1}{3}$. Da beide Dreiecke auch (bei B bzw. bei G) rechtwinklig sind, folgt, dass sie ähnlich zueinander sind. Damit ist aber $|\angle GIJ| = \frac{1}{2}|\angle BIH|$ und folglich $|\angle MB'B''| = \frac{1}{2}|\angle BIH|$. Weil aber auch $|\angle MB'G| = |\angle BIH|$ gilt, ist $B'B''$ die Winkelhalbierende von $\angle MB'G$.

Weil $|\angle GB'D| = |\angle FB'M|$ ist, geht bei der Faltung an $B'B''$ der Punkt D auf $B'F$.

Mit diesen Betrachtungen können wir auf eine weitere Art in dem Quadrat $ABCD$, in dem nur die drei Dreiecke des Satzes von Haga markiert sind, das gesuchte vierte Dreieck in der Ecke B bestimmen: Wir falten D so auf $B'F$, dass die Faltlinie durch B' geht (Bild 137b). Anschließend falten wir B' so auf die eben gefaltete Linie, dass die neue Faltlinie durch M geht (Bild 137c). Diese Faltlinie schneidet BC in I und AD in J . H finden wir als Schnitt von IC'' mit AB . IHB ist das gesuchte Dreieck.

Eine weitere Möglichkeit durch Umfalten der Quadratkante BC das vierte Dreieck in der Ecke B zu erzeugen, ergibt sich aus Bild 136a. Weil $|HC''| = |HB| = \frac{1}{4}$ ist, bestimmen wir auf AB den Punkt H und auf BC den Punkt H^* so, dass $|HB| = |CH^*| = \frac{1}{4}$ ist. Dies geht durch zweimaliges Halbieren der entsprechenden Quadratkanten (Bild 137d). Nun müssen wir nur noch H^* auf H

falten. Die Faltlinie schneidet BC in I und das gesuchte vierte Dreieck IHB ist bestimmt.

Nun wenden wir uns der Faltung zu, bei der CD das gesuchte vierte Dreieck IHB erzeugt (vgl. Bild 135b).

Dazu setzen wir voraus, dass die drei Dreiecke vom Satz von Haga (Faltung von B auf B') schon markiert sind und der Mittelpunkt M des Quadrates bestimmt ist.

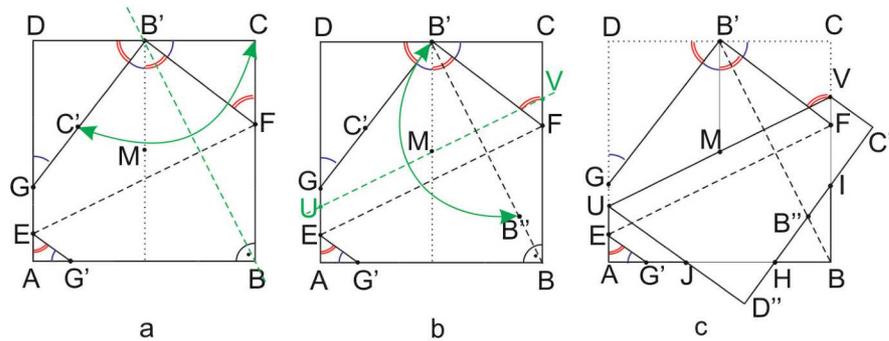


Bild 138

Wir falten zuerst C so auf $B'G$, dass die Faltlinie durch B' geht (Bild 138a). Diese Faltlinie geht auch durch B , weil sie die Halbierende des Winkels $\angle FB'M$ ist. Dieser Winkel ist kongruent zu $\angle B'FC$. Andererseits ist $B'BF$ ein gleichschenkliges Dreieck, in dem $\angle B'FC$ ein Außenwinkel ist. Folglich ist $|\angle FB'B| = \frac{1}{2}|\angle B'FC|$. Daher muss die Faltlinie mit BB' übereinstimmen, sie geht also durch B .

Nun falten wir B' so auf $B'B$, dass die Faltlinie durch M geht (Bild 138b). $D''C''$ bestimmt auf AB den Punkt H und auf BC den Punkt I (Bild 138c). Wir zeigen nun, dass $|HB| = \frac{1}{4}$ und $|BI| = \frac{1}{3}$ ist. Dazu bezeichnen wir den Schnittpunkt der Faltlinie mit AD mit U und den mit BC mit V . Weiterhin schneidet $D''U$ die Quadratkante AB in J .

Den Nachweis, dass $|HB| = \frac{1}{4}$ und $|BI| = \frac{1}{3}$ ist, führen wir analytisch mit Hilfe linearer Funktionen. Dazu legen wir die Figur in ein Koordinatensystem, wie es im Bild 139 zu sehen ist.

$y = -2x + 2$ ist die Gleichung der Geraden durch B und B' . Weil $B''(x_{B''}; y_{B''})$ auf $B'B''$ durch Falten an UV durch M entsteht, ist $|MB'| = |MB''|$. Damit können wir die Koordinaten von B'' bestimmen. Weil $|MB'| = \frac{1}{2}$ ist, ist auch $|MB''| = \frac{1}{2}$ bzw. $|MB''|^2 = \frac{1}{4}$. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras erhalten wir $(\frac{1}{2} - y_{B''})^2 + (x_{B''} - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Weil B'' auf $B'B''$ liegt, gilt $y_{B''} = -2x_{B''} + 2$.

Damit ergibt sich $[\frac{1}{2} - (-2x_{B''} + 2)]^2 + (x_{B''} - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ und nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhalten wir $x_{B''}^2 - \frac{7}{5}x_{B''} + \frac{9}{20} = 0$. Für

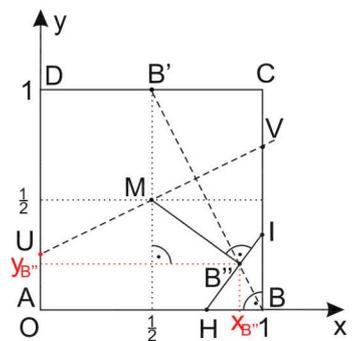


Bild 139

$x_{B''}$ ergeben sich daraus die beiden Lösungen $x_{B''_1} = \frac{9}{10}$ und $x_{B''_2} = \frac{1}{2}$. Von diesen beiden Lösungen interessiert uns nur die erste, also $x_{B''} = \frac{9}{10}$, da die zweite Lösung den Punkt B' beschreibt. Es ergibt sich $B''(\frac{9}{10}; \frac{1}{5})$.

Weil bei der Faltung von B' nach B'' die Strecke MB' auf MB'' geht und $MB' \perp CD$ ist, muss $HI \perp MB''$ sein. Die Gerade durch M und B'' hat den Anstieg $m_{MB''} = -\frac{1/2-1/5}{9/10-1/2} = -\frac{3}{4}$. Folglich hat die Gerade durch H und I den Anstieg $m_{HI} = \frac{4}{3}$. Da diese Gerade durch B'' geht, muss $y_{B''} = \frac{4}{3}x_{B''} + n_{HI}$ gelten. Mit $x_{B''} = \frac{9}{10}$ folgt $n_{HI} = -1$. Damit ist $y = \frac{4}{3}x - 1$ die Gleichung der Geraden durch H und I . Diese Gerade schneidet die x-Achse an der Stelle $x_0 = \frac{3}{4}$ und BC bei $y_0 = \frac{1}{3}$. Folglich ist $|HB| = \frac{1}{4}$ und $|BI| = \frac{1}{3}$. Damit ist das Dreieck IHB das gesuchte vierte Dreieck.

Auch hier entstehen bei der Faltung von B' nach B'' neben dem Dreieck IHB drei weitere Dreiecke $IC''V$, UAJ und $JD''H$ (Bild 138c). Diese drei Dreiecke sind nicht nur ähnlich zu IHB , sie sind sogar kongruent zu diesem. Die Ähnlichkeit folgt wie beim Satz von Haga, die Kongruenz zeigen wir jetzt. Dazu bestimmen wir die Gleichung der Faltlinie UV , die senkrecht zu $B'B''$ ist und durch M geht. Damit ergibt sich $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ als Gleichung für diese Faltlinie. Wir erhalten damit sofort $U(0; \frac{1}{4})$ und $V(1; \frac{3}{4})$. Also ist $|AU| = \frac{1}{4}$, und wegen der Ähnlichkeit von JUA zu IHB ergibt sich $|AJ| = \frac{1}{3}$.

Ebenso ist $|VC''| = |VC| = \frac{1}{4}$, woraus $|IC''| = \frac{1}{3}$ folgt.

Dann ist noch $|JH| = 1 - |AJ| - |HB| = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$. Wegen der Ähnlichkeit von HJD'' zu IHB folgt $|JD''| = \frac{1}{3}$ und $|D''H| = \frac{1}{4}$. Damit sind aber die drei Dreiecke kongruent zum Dreieck IHB .

Aus diesen Überlegungen ergibt sich eine weitere Faltung für das gesuchte Dreieck.

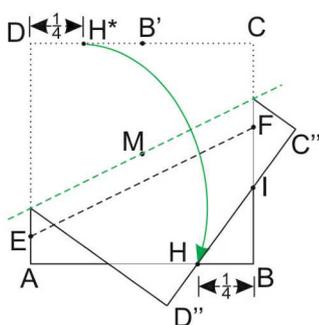


Bild 140

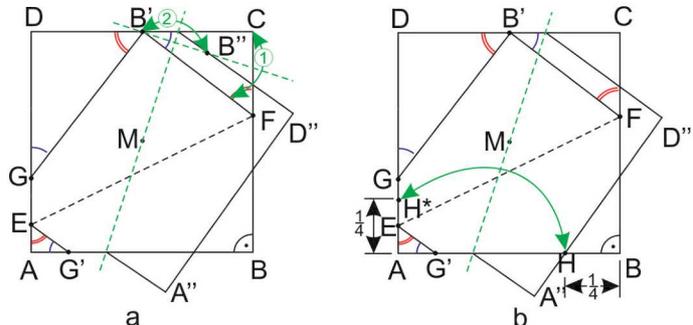


Bild 141

Weil $|D''H| = |HB| = \frac{1}{4}$ ist, bestimmen wir auf CD einen Punkt H^* mit $|H^*D| = \frac{1}{4}$ und auf AB einen Punkt H mit $|HB| = \frac{1}{4}$ (jeweils durch zweimaliges Halbieren). Nun falten wir H^* auf H und

erhalten in der Ecke B das gesuchte vierte Dreieck (Bild 140).

Jetzt wenden wir uns den beiden Faltungen zu, bei denen AD bzw. AB durch H und I gefaltet werden. Wir geben nur die Faltungen an, da die Nachweise ähnlich wie oben verlaufen.

Nun soll das Dreieck IHB durch Umfalten von AD bestimmt werden (vgl. Bild 135c).

Dazu falten wir zuerst C so auf $B'F$, dass die Faltnie durch B' geht. Dann falten wir B' so auf diese Faltnie, dass die neue Faltnie durch M geht. $A''D''$ bestimmt auf AB und BC die gesuchten Punkte H und I (Bild 141a).

Zum selben Ergebnis kommen wir, wenn wir auf AD einen Punkt H^* und auf AB einen Punkt H so festlegen, dass $|AH^*| = |HB| = \frac{1}{4}$ ist. Dann müssen wir nur noch H^* auf H falten, um das gesuchte Dreieck zu erhalten (Bild 141b).

Zum Schluss soll das Dreieck IHB durch das Umfalten von AB erzeugt werden (vgl. Bild 135d).

Dazu falten wir D auf $B'C$, sodass die Faltnie durch B' geht. Dann falten wir B' so auf diese Faltnie, dass die dabei entstehende Faltnie durch M geht (Bild 142a). $A''D''$ bestimmen auf AB und auf BC die gesuchten Punkte H und I .

Auch hier gelangen wir zum selben Ergebnis, wenn wir auf AD einen Punkt H^* und auf BC einen Punkt H^{**} so festlegen, dass $|AH^*| = |H^{**}C| = \frac{1}{4}$ ist (Bild 142b). Anschließend falten wir H^* auf H^{**} .

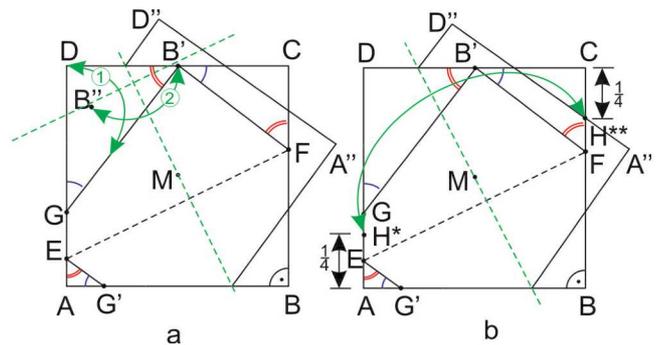


Bild 142

Damit haben wir mehrere Möglichkeiten angegeben, das vierte Dreieck, das den Satz von Haga ergänzt, durch Falten zu erzeugen.

Es gibt zwei weitere Dreiecke, die für den Satz von Haga interessant sind.

In der Faltfigur zum Satz von Haga erkennen wir ein weiteres Dreieck, nämlich GFB' (Bild 143). Dieses Dreieck ist bei B' rechtwinklig und aus Berechnungen vom Anfang dieses Beitrages wissen wir $|B'F| = \frac{5}{8}$ und $|B'G| = \frac{5}{6}$. Da das Verhältnis dieser beiden Seiten gleich $\frac{5/6}{5/8} = \frac{4}{3}$ ist, ist dieses Dreieck zum Dreieck $G'EA$ ähnlich und der Ähnlichkeitsfaktor vom kleinen zum großen Dreieck beträgt $\lambda_{AB'} = 5$.

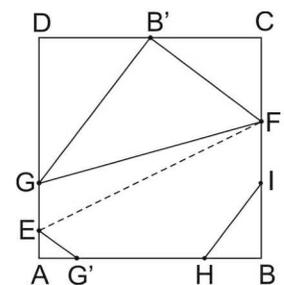


Bild 143

Und wir finden sogar noch ein weiteres Dreieck, das ähnlich zu $G'EA$ ist und den Ähnlichkeitsfaktor 6 bezüglich dieses kleinen Dreiecks hat. Dazu verlängern wir $B'G$ über G und EG' über E und G' hinaus (Bild 144a). Den Schnittpunkt der Geraden durch B', G mit der Geraden durch E, G' bezeichnen wir mit A' . A' ist auch das Bild von A bei der Faltung an EF (B nach B'). Weiterhin schneidet die Senkrechte auf CD durch B' die Gerade EG' in B^* . $B^*B'A'$ ist das gesuchte Dreieck. Dieses Dreieck ist bei A' rechtwinklig. Weil $|GA'| = \frac{1}{6}$ ist, ergibt sich $|A'B'| = 1$. Weil $|A'E| = \frac{1}{8}$ und $|G'B^*| = \frac{5}{12}$ ist, ergibt sich $|A'B^*| = \frac{3}{4}$. Und nun ist das Seitenverhältnis $\frac{|A'B'|}{|A'B^*|} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$, woraus sich die Ähnlichkeit des Dreiecks $B^*B'A'$ zu $G'EA$ und der Streckfaktor $\lambda_{AA'} = 6$ ergibt.

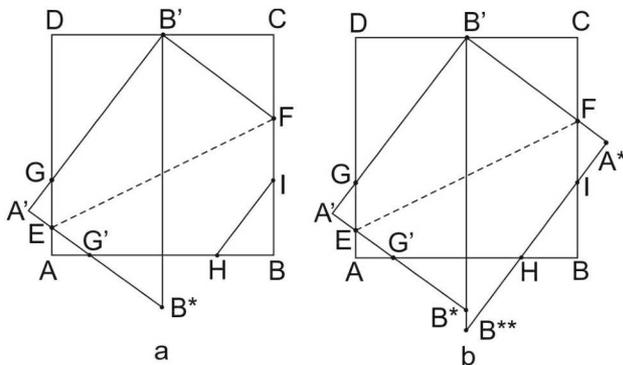


Bild 144

Zu erwähnen ist noch ein weiteres Dreieck, das betrachtet werden kann. Dazu bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden durch B' und F mit der durch H und I mit A^* (Bild 144b). Außerdem schneidet die Gerade durch H und I die durch B' und B^* in B^{**} . B^* und B^{**} fallen nicht zusammen. Dennoch ist das Dreieck $B'B^{**}A^*$ ähnlich zu $G'EA$. Weil $|B'B^{**}| = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ ist, ist der zugehörige Ähnlichkeitsfaktor $\lambda_{AA^*} = \frac{|B'B^{**}|}{|G'E|} = \frac{4/3}{5/24} = \frac{32}{5}$ nicht ganzzahlig und ist damit für die hier vorgestellte

Ergänzung zum Satz von Haga ohne Bedeutung.

Zusammenfassend können wir feststellen, dass wir zu den drei Ausgangsdreiecken, die sich beim Satz von Haga ergeben, noch drei weitere gefunden haben, die diesen Satz sinnvoll ergänzen.

12.2 B' ist nicht mehr Mitte von CD

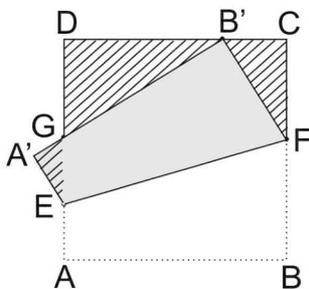


Bild 145

Beim Satz von Haga (vgl. 9) gingen wir von einem Quadrat $ABCD$ aus, bei dem wir die Ecke B auf den Mittelpunkt von CD gefaltet haben (vgl. Bild 119). Dies wollen wir jetzt dahingehend verallgemeinern, dass wir die Ecke B auf einen beliebigen Punkt von CD falten, wie es im Bild 145 zu sehen ist.

Auch hier entstehen drei Dreiecke, die in diesem Bild schraffiert sind. Mit den selben Überlegungen wie beim Satz von Haga erkennen wir, dass diese drei Dreiecke untereinander ähnlich sind.

Um die Ähnlichkeitsfaktoren der drei Dreiecke untereinander zu bestimmen, berechnen wir wieder die Längen der Dreiecksseiten unter der Voraussetzung, dass $ABCD$ ein Quadrat mit der Seiten-

länge 1 ist. Mit den Bezeichnungen aus Bild 146 ist $|CB'| = s$ mit $0 < s < 1$.

Im Dreieck FCB' gilt der Satz des Pythagoras: $t^2 = r^2 + s^2$.

Aufgrund der Faltung ist aber $|FB'| = |FB|$, woraus sich mit $|FB| = 1 - r$ nun $(1 - r)^2 = r^2 + s^2$ ergibt und $r = \frac{1-s^2}{2}$ folgt. Setzen wir dieses Ergebnis in $t^2 = r^2 + s^2$ ein, so erhalten wir $t^2 = \left(\frac{1-s^2}{2}\right)^2 + s^2 = \frac{1+2s^2+s^4}{4} = \left(\frac{1+s^2}{2}\right)^2$ und schließlich $t = \frac{1+s^2}{2}$. Damit haben wir die Längen der Seiten des Dreiecks FCB' (in Abhängigkeit von s) berechnet:

$$s = s, r = \frac{1-s^2}{2} \text{ und } t = \frac{1+s^2}{2}.$$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke erhalten wir für das Dreieck $B'DG$ jetzt $\frac{u}{v} = \frac{r}{s}$, woraus mit $u = 1 - s$ nun $v = \frac{(1-s) \cdot s}{r} = \frac{(1-s) \cdot s}{\frac{1-s^2}{2}} = \frac{2s}{1+s}$ folgt.

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras erhalten wir weiter $w^2 = u^2 + v^2 = (1 - s)^2 + \left(\frac{2s}{1+s}\right)^2 = \frac{(1+s^2)^2}{(1+s)^2}$, woraus $w = \frac{1+s^2}{1+s}$ folgt.

Damit sind auch die Seitenlängen des Dreiecks $B'DG$ (in Abhängigkeit von s) berechnet:

$$u = 1 - s, v = \frac{2s}{1+s} \text{ und } w = \frac{1+s^2}{1+s}.$$

Im Dreieck EAG' folgt mit $|BG'| = |B'G|$ sofort $y = 1 - w = 1 - \frac{1+s^2}{1+s} = \frac{(1-s) \cdot s}{1+s}$. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt $\frac{x}{y} = \frac{r}{s}$, woraus $x = \frac{y \cdot r}{s} = \frac{\frac{(1-s) \cdot s}{1+s} \cdot \frac{1-s^2}{2}}{s} = \frac{(1-s) \cdot (1-s^2)}{2 \cdot (1+s)} = \frac{(1-s)^2}{2}$ folgt. Ebenso gilt $\frac{z}{x} = \frac{t}{r}$, womit $z = \frac{x \cdot t}{r} = \frac{(1-s) \cdot (1+s^2)}{2 \cdot (1+s)}$ sich ergibt.

Damit haben die Seiten im Dreieck EAG' (in Abhängigkeit von s) die folgenden Längen:

$$x = \frac{(1-s)^2}{2}, y = \frac{(1-s) \cdot s}{1+s} \text{ und } z = \frac{(1-s) \cdot (1+s^2)}{2 \cdot (1+s)}.$$

Nun berechnen wir die Seitenverhältnisse im Dreieck FCB' . Es gilt:

$$r : s : t = \frac{1-s^2}{2} : s : \frac{1+s^2}{2} = (1 - s^2) : 2s : (1 + s^2).$$

Dieses Seitenverhältnis gilt natürlich aufgrund der Ähnlichkeit auch in den anderen beiden Dreiecken.

Nun untersuchen wir einen Spezialfall.

Wir nehmen an, dass s rational ist, also lässt sich s als $s = \frac{m}{n}$, mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $0 < m < n$ darstellen. Wir teilen damit die Strecke CD in n gleiche Teile und legen B' in den m -ten Teilpunkt von C aus. Für diesen Fall gilt $r : s : t = \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) : 2\frac{m}{n} : \left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right) = (n^2 - m^2) : 2mn : (n^2 + m^2)$. Weil $n^2 - m^2$, $2mn$ und $n^2 + m^2$ natürliche Zahlen sind, sind die zugehörigen Dreiecke pythagoreische Dreiecke.

Ist s nicht rational, lässt sich also nicht als Bruch $\frac{m}{n}$ darstellen, so ist s irrational. Wir zeigen, dass die zugehörigen Dreiecke dann nicht pythagoreisch sind. Nehmen wir nämlich im Gegenteil

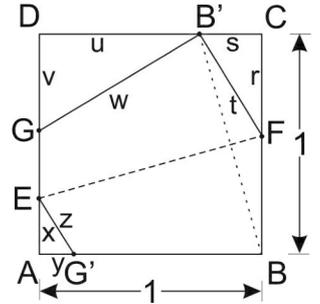


Bild 146

Nun spiegeln wir den Punkt I an KL und erhalten I' auf CD , wobei $LI' \parallel FB'$ ist. Daher sind die beiden Dreiecke LCI' und FCB' ähnlich zueinander und es gilt: $\frac{|FC|}{|FB'|} = \frac{|LC|}{|LI'|}$, also $\frac{r}{t} = \frac{\frac{1-s}{2}}{|LI'|}$ oder $|LI'| = \frac{\frac{1-s}{2} \cdot t}{r} = \frac{\frac{1-s}{2} \cdot \frac{1+s^2}{2}}{\frac{1-s^2}{1}} = \frac{1+s^2}{2(1+s)}$.

Weil $|LI| = |LI'|$ ist, ist $p = 1 - |LI| - |LC| = 1 - \frac{1+s^2}{2(1+s)} - \frac{1-s}{2} = \frac{s}{1+s}$.

Nun können wir λ_{AB} berechnen: $\lambda_{AB} = \frac{p}{y} = \frac{\frac{s}{1+s}}{\frac{(1-s) \cdot s}{1+s}} = \frac{1}{1-s}$.

Damit sind die drei Ähnlichkeitsfaktoren $\lambda_{AB} = \frac{1}{1-s}$, $\lambda_{AC} = \frac{1+s}{1-s}$ und $\lambda_{AD} = \frac{2}{1-s}$ bestimmt. Auch unter dieser Betrachtungsweise ordnet sich das vierte Dreieck gut ein.

Im Spezialfall $s = \frac{m}{n}$ gilt: $\lambda_{AB} = \frac{n}{n-m}$, $\lambda_{AC} = \frac{n+m}{n-m}$ und $\lambda_{AD} = \frac{2n}{n-m}$.

Abschließend betrachten wir noch den Punkt G auf AD .

Wir hatten bereits $|DG| = v = \frac{2s}{1+s}$ berechnet. Im Spezialfall $s = \frac{m}{n}$ ergibt sich $|DG| = \frac{2m}{n+m}$. Setzen wir im Besonderen $m = 1$, so wird aus $s = \frac{1}{n}$ nun $|DG| = \frac{2}{n+1}$.

Damit erhalten wir eine weitere Verallgemeinerung des Satzes von Haga: Ist B' der erste Punkt einer n -Teilung der Quadratseite CD , dann ist der Mittelpunkt von DG der erste Punkt einer $(n+1)$ -Teilung der Quadratseite DA .

Beginnen wir mit der Halbierung von CD und falten B auf diesen Mittelpunkt (Satz von Haga), so drittelt der Mittelpunkt von DG die Seite DA . Falten wir nun C auf diesen Punkt, so entsteht auf AB eine Viertelung dieser Quadratseite. Nun falten wir D auf den entsprechenden Punkt von AB , so entsteht auf BC ein Punkt, der diese Quadratseite fünftelt. Setzen wir dieses Verfahren sukzessiv fort, so lässt sich eine Quadratseite in n gleiche Teile teilen.

13 Vom Quadrat zum Würfel

Jetzt bewegen wir uns aus der Ebene in den Raum. Es geht um die räumliche Erfassung des Würfels, wie er aus sechs quadratischen Flächen entsteht.

Zuerst wird ein Würfel vorgestellt, dessen Seitenflächen mit Scharnieren zusammengehalten werden. Dadurch sind auch Experimente mit Würfelnetzen sehr gut möglich.

Dann wird ein Würfel vorgestellt, der sich aus sechs Modulen zusammenstecken lässt und sehr stabil ist. Dieser Würfel wird später in verschiedene Richtungen verändert.

13.1 Ein Würfel mit Scharnieren

Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen sind drei Blatt DIN A4-Papier, die jeweils in zwei Blatt DIN A5-Papier geteilt werden, wie es im Bild 149a gezeigt ist. Wir beschreiben hier die weitere Arbeit mit einem DIN A5-Papier, die anderen Blätter werden anschließend analog bearbeitet.

Vom DIN A5-Papier wird ein Quadrat abgetrennt, wie es im Bild 149b gezeigt ist. Auch das übrig gebliebene Rechteck wird noch benötigt. Es wird in der Länge halbiert und anschließend werden diese beiden Rechtecke zur Seite gelegt.

Nun wird das Quadrat, wie im Bild 149c gezeigt, parallel zu einer Kante halbiert. Damit sind aus dem Quadrat zwei Rechtecke entstanden, die beide doppelt so lang wie breit sind. Aus diesen beiden Rechtecken entsteht nun eine quadratische Seitenfläche für den Würfel.

Dazu markieren wir in jedem dieser beiden Rechtecke, jeweils auf einer längeren Rechteckseite, einen Punkt X, wie es im Bild 150a gezeigt ist. Nun werden die kurzen Rechteckseiten an den Punkt X herangefaltet (Bild 150b), sodass aus jedem der beiden Rechtecke ein Quadrat entsteht.

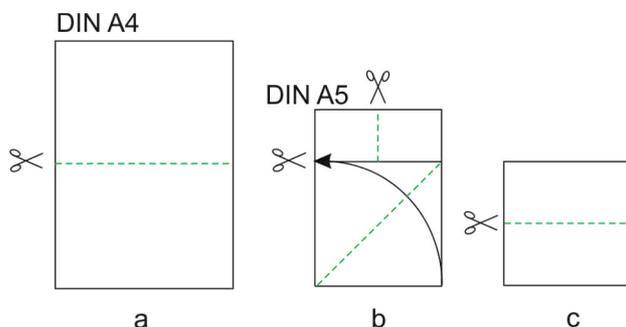


Bild 149: Zuschnitt

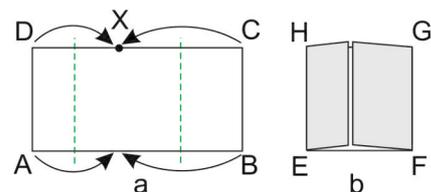


Bild 150: Ein Modulteil

Dass es sich dabei tatsächlich um Quadrate handelt, ergibt sich aus der Eigenschaft der Ausgangsrechtecke, bei denen eine Seite doppelt so lang wie die andere Seite ist. Durch das Zusammenfallen

kommt die jeweils längere Rechteckseite doppelt auf sich zu liegen, womit sich deren Längen halbieren. Dadurch entstehen Vierecke mit jeweils vier gleich langen Seiten. Aufgrund des Faltens sind die beiden Vierecke auch rechtwinklig und damit Quadrate.

Nun setzen wir diese beiden Rechtecke, die zu jeweils zu einem Quadrat zusammengefaltet wurden, zu einem einzigen Quadrat zusammen. Dieser Vorgang ist den Bildern 151a bis 151d zu entnehmen.

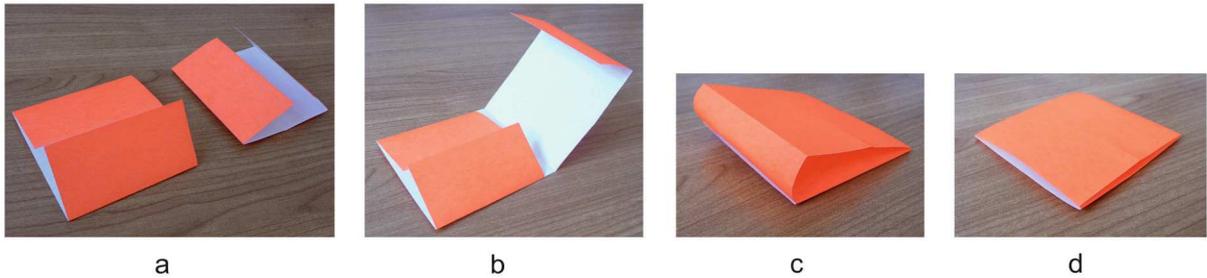


Bild 151: Zusammenbau eines Moduls

Das Besondere an diesem Quadrat ist, dass es an jeder Seite eine „Tasche“ gibt, in die später „Scharniere“ eingefügt werden können. Ein ähnliches Modul wird in [11] beschrieben.

Außerdem besteht dieses Quadrat aus vier Schichten, womit sein Flächeninhalt ein Viertel des Flächeninhaltes des Ausgangsquadrates ist.

Aus den zur Seite gelegten kleinen Rechtecken werden wir nun, die bereits angesprochenen „Scharniere“ herstellen. Dazu falten wir beide Rechtecke jeweils parallel zur längeren Kante in der Mitte zusammen und anschließend wieder auseinander.

Nun bearbeiten wir die anderen fünf DIN A5-Papiere genauso, wie oben beschrieben. Insgesamt erhalten wir damit sechs kleine Quadrate und 12 Scharniere.

Diese Quadrate können wir nun mit den Scharnieren verbinden, wie es in den Bildern 152a und 152b zu sehen ist. Eventuell müssen diese Scharniere in der Länge etwas kürzen, damit sie gut in die Taschen der Quadrate eingefügt werden können.

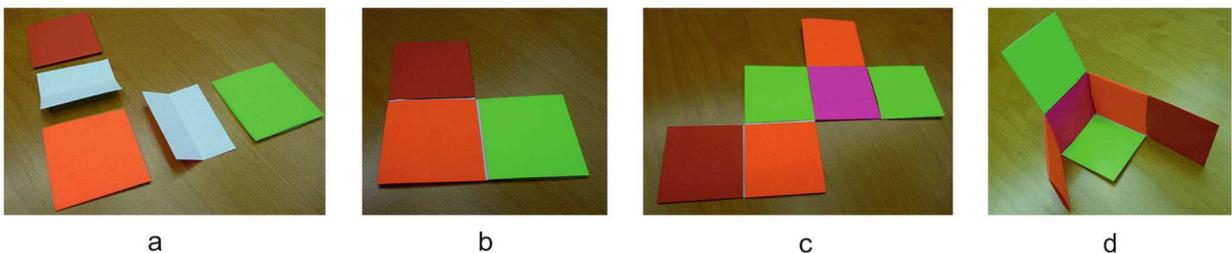


Bild 152: Zusammenbau der Module

jetzt können wir die sechs Quadrate mit den Scharnieren untereinander verbinden und versuchen,

daraus einen Würfel zu bilden. Dabei wird der Begriff des Würfelnetzes deutlich. Wir erkennen auch, dass nicht jede Zusammenstellung der sechs Quadrate einen Würfel ergibt. In den Bild 152c und Bild 152d ist ein solches Würfelnetz und das Zusammenfalten dargestellt.

Bild 153 zeigt den fertigen Würfel.

Nebenbei ergab sich zwangsläufig auch die Frage nach allen möglichen Würfelnetzen. Im Bild 154 sind alle Würfelnetze gezeigt. Dabei können wir auch die Anzahl der notwendigen Scharniere in jedem Würfelnetz zählen. Wir stellen fest, dass immer fünf Scharniere benötigt werden, um sechs gleichgroße Quadrate zu einem Würfelnetz zusammenzusetzen. Das bedeutet aber auch, dass in einem Würfel immer sieben Kanten (die man natürlich nicht beliebig wählen kann) aufgeschnitten werden müssen, um den Würfel in ein Würfelnetz zu verwandeln.

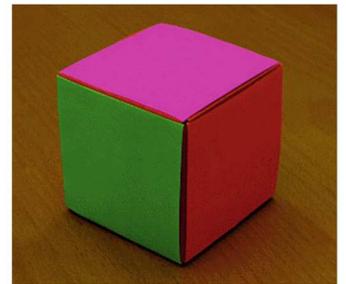


Bild 153: Der Würfel

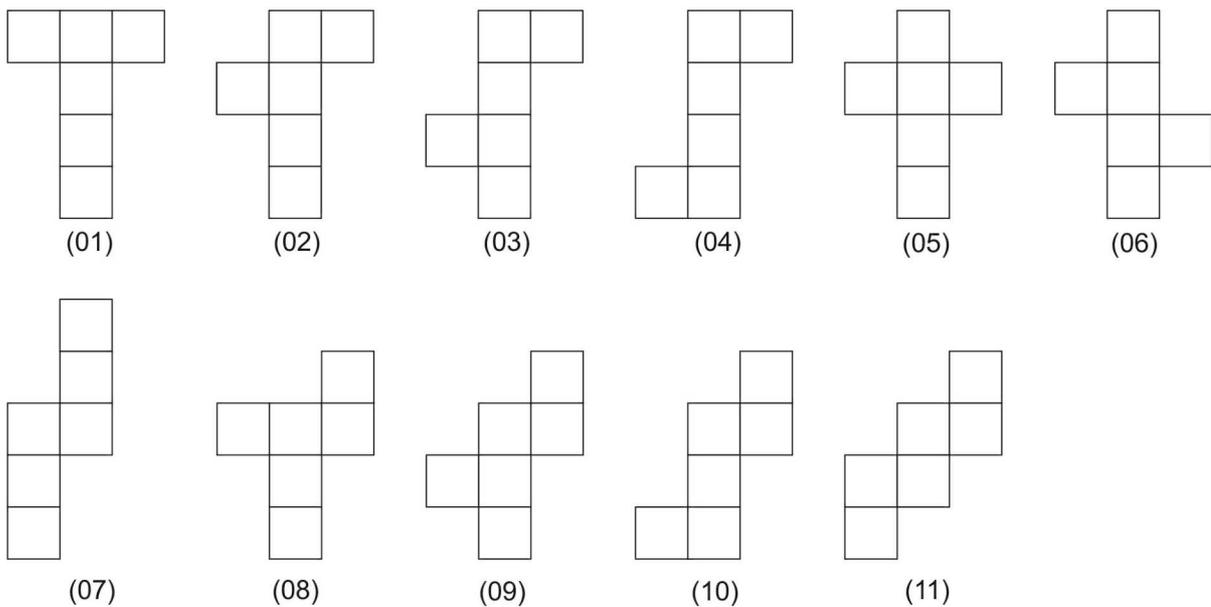


Bild 154: Würfelnetze

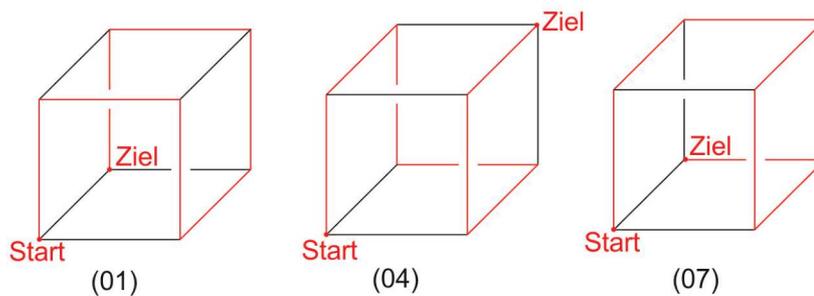


Bild 155: Schnittkanten

Kann man diese sieben Kanten, die aufgeschnitten werden müssen, auch hintereinander anordnen, ohne dass wir die Schere beim Schneiden abzusetzen müssen? Wir finden nur drei Würfelnetze (01), (04) und (07) für die das möglich ist. Im Bild 155 sind die zugehörigen Schnitte gezeigt.

13.2 Ein Würfel zum Stecken

Auch dieser Würfel entsteht aus sechs quadratischen Faltblättern. Anders als beim vorhergehenden Würfel werden hier keine Scharniere benötigt.

Der fertige Würfel ist im Bild 156 zu sehen. Er wird in [23] beschrieben und geht auf PAUL JACKSON zurück.

Wir benötigen sechs gleichgroße, quadratische und möglichst verschiedenfarbige Faltblätter. Die Beschreibung erfolgt hier zuerst für ein Blatt und muss dann für alle sechs Blätter in gleicher Weise durchgeführt werden.

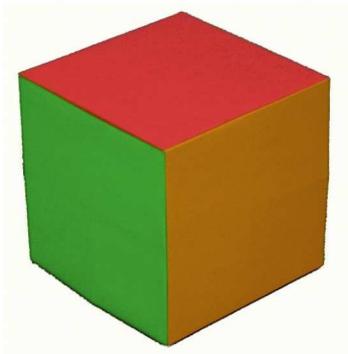


Bild 156: Der Würfel

An zwei gegenüberliegenden Seiten des quadratischen Blattes markieren wir mit einem Stift die Seitenmittelpunkte (Bild 157a). Anschließend falten wir die beiden nicht markierten Kanten an die markierten Mittelpunkte heran, wodurch das Quadrat zu einem Rechteck wird (Bild 157b). Nun werden die Mittelpunkte der langen Rechteckkanten ebenfalls mit einem Stift markiert. Anschließend falten wir die kurzen Rechteckkanten an die markierten Mittelpunkte heran, sodass nun ein kleineres Quadrat entsteht (Bild 157c). Die zuletzt umgefalteten Teile richten wir senkrecht auf, sodass ein „u-förmiges“ Modul entsteht (Bild 157d).

Für den Zusammenbau des Würfels benötigen wir sechs solche Module.

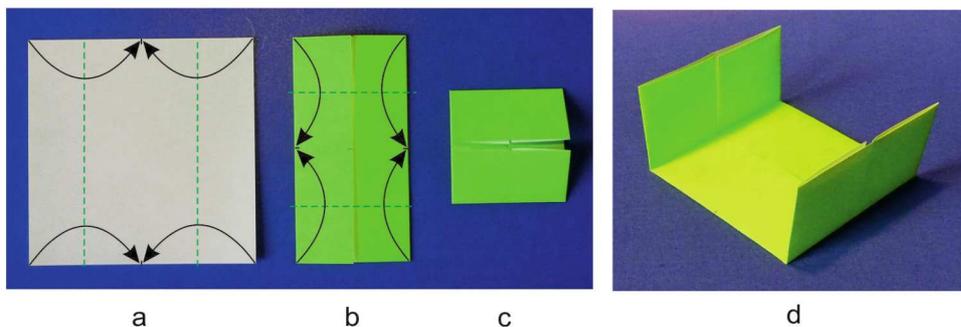


Bild 157: Das Modul

In den Bildern 158a bis 158c wird das Zusammenfügen der sechs Teile gezeigt. Im Bild 158d ist der fertige Würfel zu sehen.

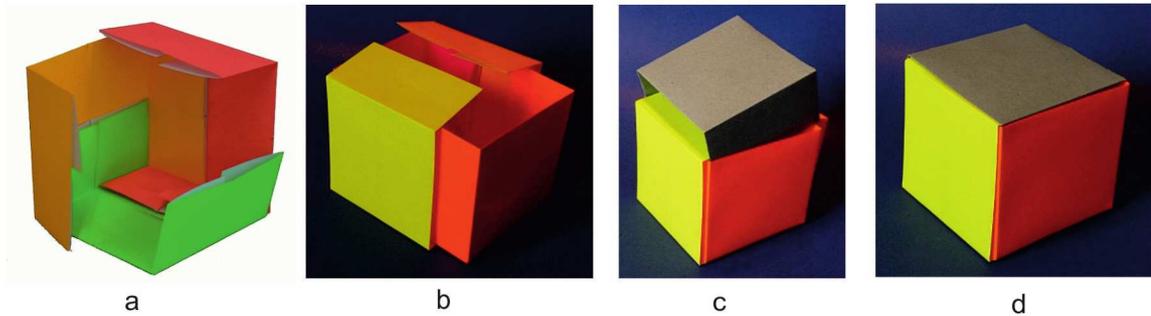


Bild 158: Zusammensetzen des Würfels

Dieser Würfel eignet sich gut als Einstieg in des modulare Falten, er hält gut zusammen und ist stabil.

14 Der Kolumbuswürfel

Jetzt setzen wir die Betrachtung des modularen Steckwürfels aus Kapitel 13.2 fort. Wir verändern einige Module so, dass ein Würfel mit einer eingestülpten Ecke zusammengesteckt werden kann. Im Bild 159 ist ein solcher Würfel zu sehen.

Dieser Würfel heißt nach [23] auch Kolumbus-Würfel. Diese Namensgebung erfolgte in Analogie zum Ei des Kolumbus, ein Ei, welches Christoph Kolumbus (1451 - 1506) auf die „Spitze“ gestellt haben soll. Diese Geschichte soll sich 1493 bei einem Festmahl zu Ehren des kühnen Seefahrers zuge tragen haben (vgl. [25]). Natürlich saßen auch Neider an der Festtafel, die behaupteten, dass ja jeder andere auch diese Entdeckungsfahrten hätte durchführen können, wenn sie auf diese Idee gekommen wären. Daraufhin stellte Kolumbus den Neidern das einfache Problem, ein Ei auf seine Spitze zu stellen. Kein Gast probierte es oder konnte eine Lösung vorschlagen. Nun setzte Kolumbus das (hart gekochte) Ei kräftig mit der Spitze auf die Tischplatte, wodurch das Ei eingedellt wurde und stehen blieb.

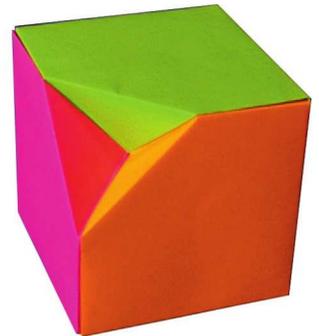


Bild 159: Der Kolumbuswürfel

Auch unser Würfel kann in ähnlicher Weise auf einer „Spitze“ stehen. Nur wollen wir diese Spitze nicht mit „Gewalt“ eindellen, sondern die Module, aus denen der Würfel dann zusammengesetzt wird, entsprechend falten, dass eine eingestülpte Ecke entsteht.

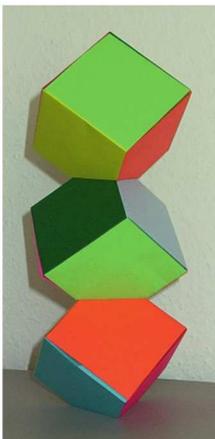


Bild 160: Ein Turm



Bild 161: Ein Ring



Bild 162: Ein Polyeder

Wenn man mehrere solche Würfel hat, dann lassen sich diese sogar zu einem Turm übereinander stellen (Bild 160), fünf dieser Würfel zu einem geschlossenen Ring (Bild 161) zusammen legen oder 20 Würfel zu einem größeren Polyeder zusammensetzen (Bild 162). Die 20 Würfel bilden dann die

Ecken eines regelmäßigen Dodekaeders. Wir werden anschließend auch untersuchen, ob dieser Ring ein „exaktes“ regelmäßiges Fünfeck ergibt, oder ob der Ring aufgrund kleiner Ungenauigkeiten so gut zusammenpasst.

Nun aber zum Bau des Würfels.

Der Kolumbus-Würfel entsteht aus sechs gleichgroßen Quadraten. Am besten eignen sich wieder verschiedenfarbige, quadratische Faltblätter. Diese sechs Quadrate werden nach Bild 157 zu sechs „u-förmigen“ Modulen gefaltet.

Von diesen sechs Modulen legen wir drei zur Seite. Die anderen drei werden weiter bearbeitet. Auch hier zeigen wir nur die Bearbeitung eines Moduls, da die anderen beiden wieder analog gefaltet werden.

Von dem u-förmigen Modul werden die senkrecht nach oben stehenden Laschen nach außen gelegt, sodass wieder ein Rechteck mit zwei zusätzlichen Faltlinien entsteht (Bild 163a). Die rechte obere Ecke dieses Rechtecks wird zum Mittelpunkt der linken Kante hin umgefaltet. Der nächste Schritt ist etwas schwierig.

Von dem eben umgefalteten Dreieck wird im 1. Schritt die linke untere Ecke auf die Mittelpunktmarkierung der rechten Rechteckseite gelegt (Bild 163b). Dabei wird fast gleichzeitig die obere Dreiecksecke auf die Mittelpunktmarkierung der linken Kante gelegt. Dadurch entsteht im rechten, oberen Teil eine innenliegende Falte und insgesamt ein „hausähnliches“ Fünfeck. Alle Kanten müssen nun gut und kräftig gefalzt werden. Das fertig gefaltete Teil zeigt Bild 163c. Abschließend werden der obere und der untere Teil des Fünfecks wieder senkrecht nach oben gestellt. Die Bilder 163d und 163e zeigen das fertige Modul aus zwei verschiedenen Blickrichtungen.

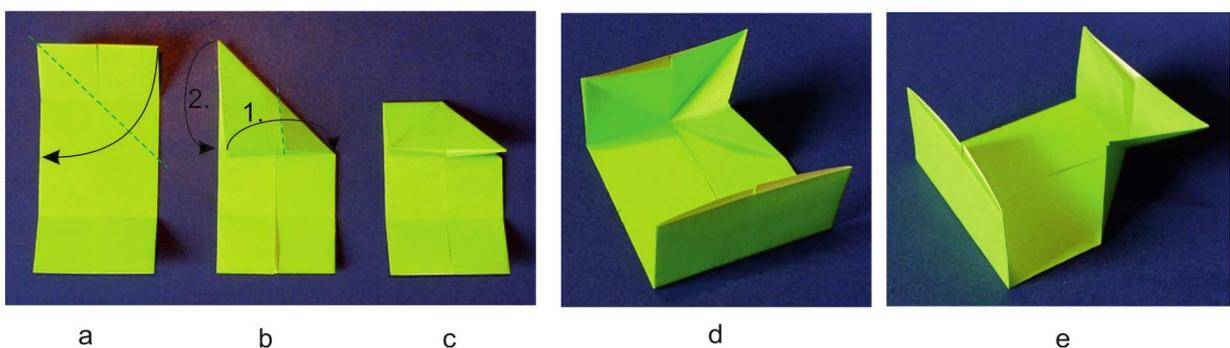
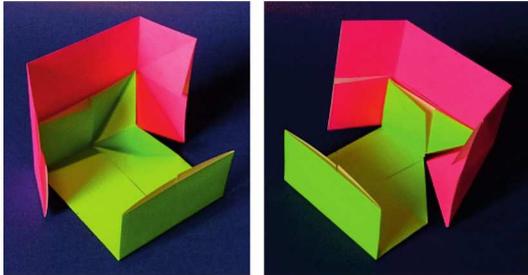


Bild 163: Das veränderte Modul

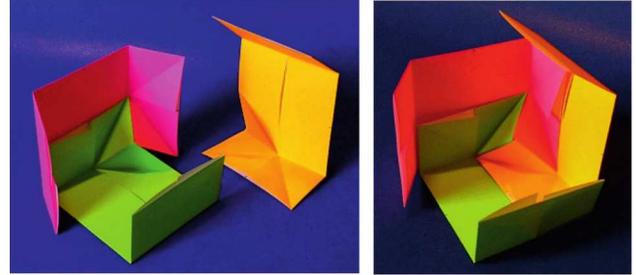
Nun werden zuerst die drei zuletzt gefalteten Eck-Module zusammengesetzt. Dieser Zusammenbau lässt sich aus den Bildern 164a bis 165b entnehmen.



a

b

Bild 164: Zusammenbau von zwei Eckmodulen

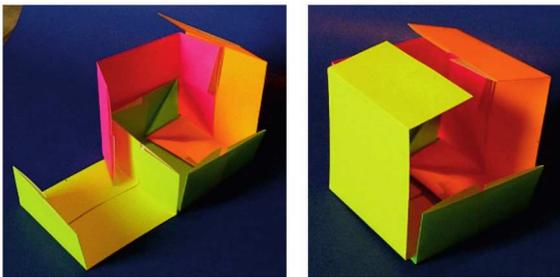


a

b

Bild 165: und der dritte Eckmodul

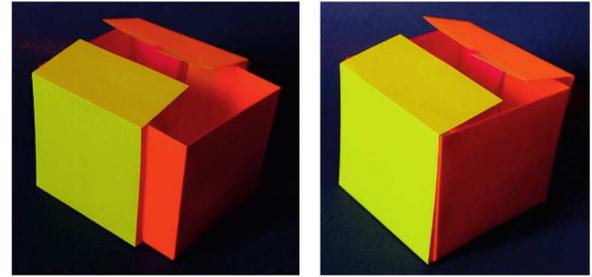
Anschließend werden zwei der restlichen drei u-förmigen Module entsprechend der Bilder 166a und 166b bzw. 167a und 167b hinzugefügt.



a

b

Bild 166

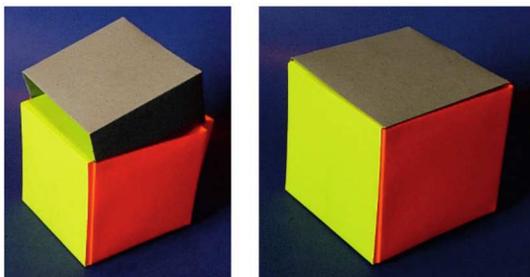


a

b

Bild 167

Abschließend wird noch das letzte u-förmige Modul von oben eingesetzt, wie es in den Bildern 168a und 168b zu sehen ist. Nun muss der Würfel nur noch umgedreht werden, damit wir die eingestülpte Ecke sehen können (Bild 169).



a

b

Bild 168

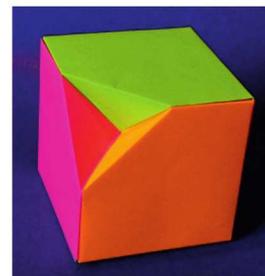


Bild 169: Der Kolumbuswürfel

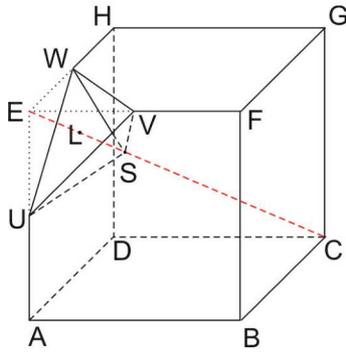


Bild 170: Der Kolumbuswürfel

Jetzt sehen wir uns den Kolumbus-Würfel etwas genauer an. Er entsteht aus dem Würfel $ABCDEFGH$, bei dem die Ecke E nach innen gestülpt wurde. S ist die innere Ecke des Kolumbus-Würfels wie es im Bild 170 gezeigt ist.

Aufgrund der Faltung des Eck-Moduls ergibt sich, dass $|EU| = |EV| = |EW| = \frac{a}{2}$ ist, wenn a die Kantenlänge des Ausgangswürfels bezeichnet. Damit können wir das Volumen der, vom Würfel abgeschnittenen Pyramide $UVWE$ berechnen: $V_P = \frac{1}{3}A_G \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}) \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{48}a^3$.

Weil die abgeschnittene Pyramide $UVWE$ kongruent zu der nach innen gestülpten Pyramide $UVWS$ ist, ergibt sich für das Volumen des Kolumbus-Würfels: $V_K = a^3 - 2 \cdot V_P = a^3 - 2 \cdot \frac{1}{48}a^3 = \frac{23}{24}a^3$.

Die Oberfläche A_K des Kolumbus-Würfels verändert sich gegenüber der des Ausgangswürfels nicht und beträgt demzufolge $A_K = 6a^2$.

Mit dem Wert von V_P können wir auch die Höhe $|EL| = h_P$ der Pyramide $UVWE$ bezüglich der Grundfläche UVW berechnen. Dabei bezeichnet L den Schnittpunkt von CE mit UVW . Weil $V_P = \frac{1}{3}|UVW|h_P$ ist, folgt mit $|UVW| = \frac{1}{2} \cdot |UV| \cdot |UW| \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot (\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{8}\sqrt{3}$, nun $\frac{1}{48}a^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{8}\sqrt{3} \cdot h_P$. Damit ergibt sich $h_P = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot |CE|$, und damit ist die Höhe h_P der Pyramide $UVWE$ genau ein Sechstel der Raumdiagonalen $|CE|$ des Ausgangswürfels.

Weil S auf der Raumdiagonalen CE des Ausgangswürfels liegt und L die Strecke ES halbiert, ist $|ES|$ ein Drittel der Raumdiagonalen $|CE|$. Außerdem ist UVW senkrecht zu CE .

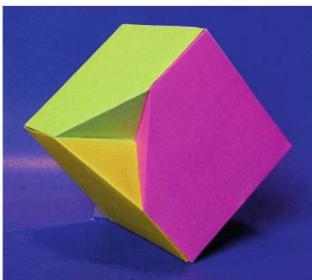


Bild 171



Bild 172

Aus der Kongruenz der Pyramiden $UVWE$ und $UVWS$ folgt auch, dass die drei nach innen gehenden Dreiecksflächen paarweise senkrecht aufeinander stehen. Folglich passt in die eingestülpte Ecke des Kolumbus-Würfels eine Ecke eines normalen Würfels exakt hinein. Daher können wir, wie im Bild 160 schon gezeigt

wurde, mehrere Kolumbus-Würfel übereinander stapeln.

Auch ein Würfelring, wie er im Bild 161 gezeigt ist, lässt sich aus fünf Kolumbus-Würfeln zusammensetzen. Diesen Würfelring werden wir nun etwas genauer untersuchen.

Zum Zusammenbau des Würfelringes wird ein Kolumbus-Würfel, wie er im Bild 170 gezeigt ist, um die Kante AD um 45° gekippt (Bild 171). Ein zweiter solcher Würfel wird ebenfalls um eine Kante gekippt und in die nach innen gestülpte Ecke eingefügt. Im Bild 172 ist diese Situation dargestellt. Die restlichen drei Würfel werden entsprechend eingefügt, sodass der Würfelring entsteht.

Bild 173a zeigt einen solchen Ring von oben, Bild 173b die schematische Darstellung dieser Situation. Im Bild 173b ist auch das Fünfeck eingezeichnet, das durch die fünf Kolumbus-Würfel gebildet wird. Wenn alles exakt zusammenpasst, dann muss dieses Fünfeck regelmäßig sein. Insbesondere muss dann der eingezeichnete Winkel φ am Schnittpunkt S die Größe von 72° haben. Dieser Winkel stimmt natürlich mit dem zweiten, im Bild 173b eingezeichneten Winkel φ überein, weil die Schenkel des Winkels φ in S parallel zu den Schenkeln des zweiten Winkels sind.

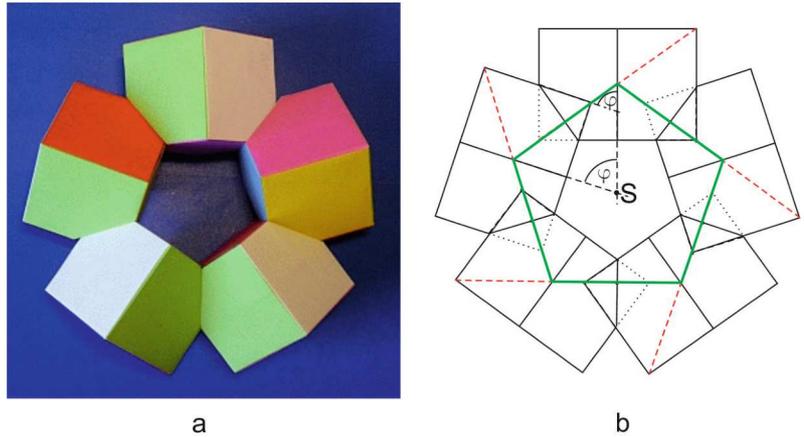


Bild 173: Der Ring

Bild 174 zeigt die senkrechte Projektion des gekippten Kolumbus-Würfels in die Grundebene.

Wir werden nun die Größe des Winkels φ berechnen.

Dazu bedenken wir zuerst, dass $|ES| = \frac{1}{3}|EC|$ ist (Bild 170). Demzufolge ist in der senkrechten Parallelprojektion dieses Würfels in der, um AD um 45° gekippten Lage (Bild 174) auch $|E'S'| = \frac{1}{3}|E'C'|$. Bezeichnen wir noch den Lotfußpunkt von S' auf $E'B'$ mit Q' , so ist $S'Q' \parallel B'C'$, und mit dem Strahlensatz folgt $|S'Q'| = \frac{1}{3}|B'C'| = \frac{1}{3}a$ und $|E'Q'| = \frac{1}{3}|E'B'| = \frac{1}{3}a\sqrt{2}$.

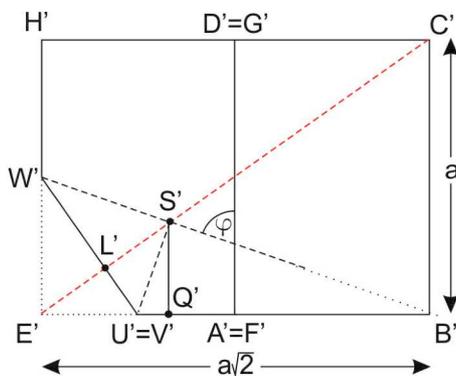


Bild 174

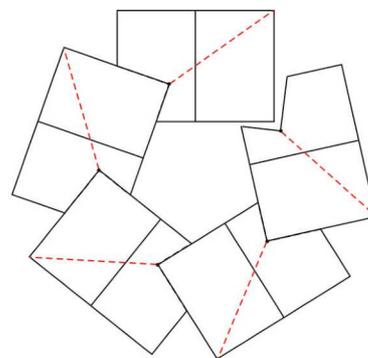
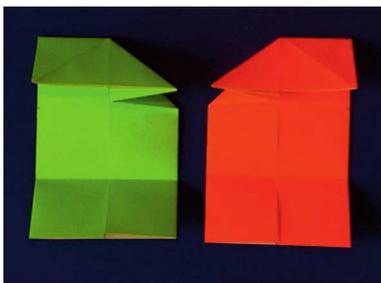


Bild 175

Weil auch $S'Q' \parallel E'W'$, $\frac{|E'W'|}{|S'Q'|} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{3}a} = \frac{3}{2}$ und ebenso $\frac{|E'B'|}{|Q'B'|} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{2}{3}a\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$ ist, folgt mit der Umkehrung des Strahlensatzes, dass die Gerade durch W' und S' auch durch B' gehen muss. Damit ergibt sich $\tan \angle E'B'W' = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{3}a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, also $|\angle E'B'W'| \approx 19,471\dots^\circ$. Weil $|\angle E'B'C'| = 90^\circ$ ist, ist auch $|\angle W'B'C'| = \varphi$. Daraus folgt aber sofort, dass $\varphi \approx 70,658\dots^\circ$ ist. Damit ist aber sofort klar, dass die fünf Kolumbus-Würfel keinen „echten“ Fünfeckring bilden.

Wenn man die fünf Kolumbus-Würfel nacheinander „exakt“ zusammenstecken würde, dann würde zwischen dem fünften und dem ersten Kolumbus-Würfel eine kleine Lücke klaffen.

Damit ist auch klar, dass das im Bild 162 gezeigte, aus 20 Kolumbus-Würfeln zusammengesetzte Polyeder, nicht „exakt“ zusammenpassen kann. Trotzdem sieht es gut aus und die 20 Würfelmittelpunkte bilden (fast) die Ecken eines regelmäßigen Dodekaeders.



a

Bild 176



b

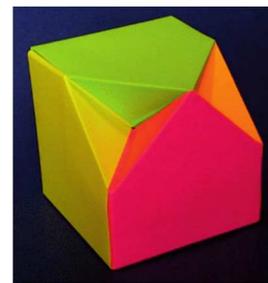


Bild 177

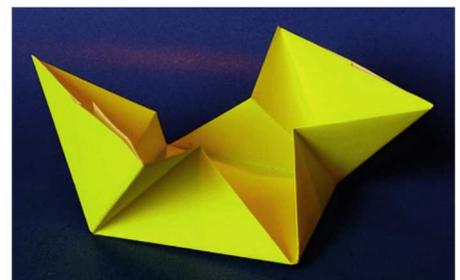
Natürlich können wir auch einen Würfel mit zwei gegenüberliegenden eingestülpten Ecken falten. Dazu müssen die drei, bisher nicht weiter verarbeiteten u-förmigen Teile entsprechend der drei anderen Eck-Module gefaltet werden. Zu beachten ist dabei, dass dabei spiegelbildlich gefaltet werden muss, wie es im Bild 176a gezeigt ist. Links sieht man ein Eck-Modul der ersten Serie und links ein spiegelbildlicher Eck-Modul, von denen auch drei Stück gebraucht werden, um die gegenüberliegende eingestülpte Ecke zu erzeugen. Bild 176b zeigt den fertigen Würfel.



a



b



c

Bild 178

Im Bild 177 ist ein Würfel zu sehen, in dem zwei nebeneinander liegende Ecken eingestülpt sind.

Natürlich können wir auch alle Ecken eines Würfels einstülpen. Dazu benötigt man sechs gleiche Module, die nach der gleichen Falanleitung, die in Bildern 163a bis 163e gezeigt ist, entstehen. Jedes Modul wird aber an allen vier Ecken gefaltet.

Bild 178a zeigt das fertige Faltmuster. In den Bildern 178b und 178c ist ein fertiges Modul in zwei verschiedenen Lagen zu sehen. Bild 179 zeigt schließlich den fertigen Körper.

Den selben Körper, einen Würfel mit acht eingestülpten Ecken können wir auch mit anderen Modulen herstellen. Dieser wird im Kapitel 15 beschrieben.

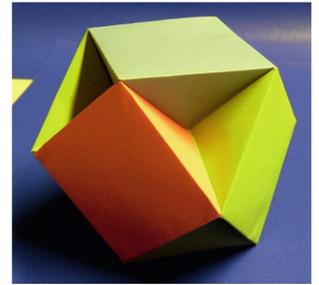


Bild 179

15 Der Schmetterlingsball

Der Schmetterlingsball (Bild 180) wird aus zwölf gleichen Modulen zusammengesetzt. Beim Zusammenbau stellt man schnell fest, dass der Körper sehr instabil ist. Wirft man diesen Körper vorsichtig nach oben und schlägt mit der Hand von unten gegen den fallenden Körper, dann zerfällt er in seine einzelnen Module, die nun wie kleine Schmetterlinge zum Boden trudeln. Daher trägt dieser Körper auch den Namen Schmetterlingsball.



Bild 180

Der Schmetterlingsball wird in [14], (S. 93ff.) beschrieben. Jeder der zwölf Module entsteht aus einem quadratischen Faltpapier mit der Seitenlänge a . Die Faltanleitung ist den Bildern 181a, b und c zu entnehmen. Bild 181d zeigt ein Foto des fertigen Moduls.

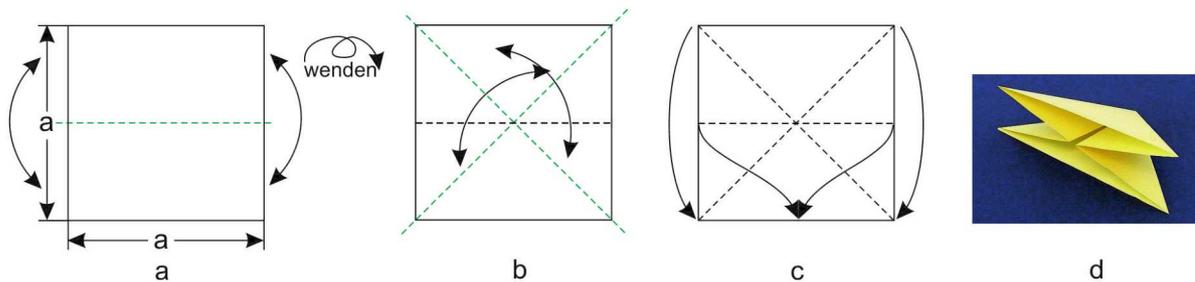


Bild 181: Faltschrittfolge für ein Modul

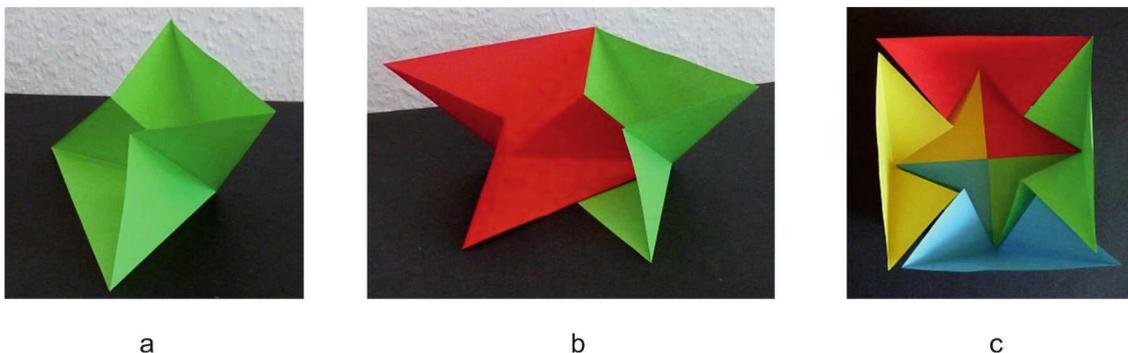


Bild 182: Zusammenbau von Modulen

Alle zwölf Module werden nun so aufgerichtet, dass jedes Modul mit einem Dreieck auf dem Tisch liegt und das andere Dreieck senkrecht zum Tisch steht. Bild 182a zeigt ein solches Modul.

Nun werden die Module zusammengesetzt. Dabei müssen wir bedenken, dass jede quadratische Seitenfläche des Schmetterlingsballs durch Dreiecke von vier Modulen gebildet wird. Die nach innen gehenden Ecken des Körpers werden von den nach innen gefalteten kleinen Dreiecken der Module geformt. Im Bild 182b sind zwei Module gezeigt, wie sie zusammengesetzt werden. Bild 182c zeigt, von oben gesehen, vier zusammengesetzte Module. Anschließend werden vier weitere Module an den Seiten eingefügt und zum Abschluss vier Module für die Deckfläche. Wir merken sehr schnell, dass dieser Zusammenbau schwierig ist, denn die Module halten schlecht zusammen.

Für den Zusammenbau des Körpers erweist es sich als vorteilhaft, wenn wir uns eine Schachtel bauen, in der wir den Körper zusammensetzen können. In [14] wird ebenfalls eine solche traditionelle Schachtel, die aus einem quadratischen Faltpapier hergestellt wird, beschrieben.

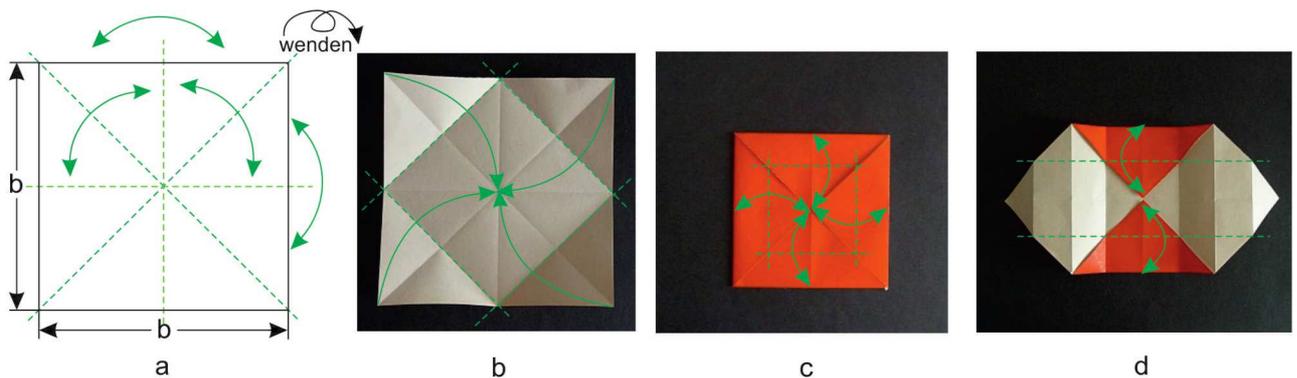


Bild 183: Faltfolge für die Schachtel

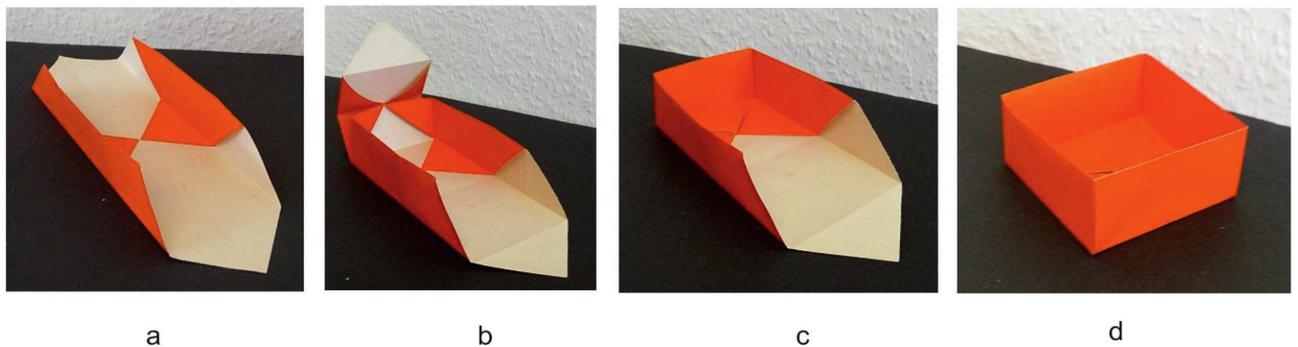


Bild 184: Faltfolge für die Schachtel (Fortsetzung)

Für diese Schachtel starten wir mit einem quadratischen Faltpapier mit der Kantenlänge b . Zuerst falten wir die zu den Kanten parallelen Mittellinien und dann die Diagonalen, wie es im Bild 183a gezeigt ist. Nach dem Wenden des Quadrates werden die Quadratecken zum Mittelpunkt gefaltet (Bild 183b). Dabei entsteht ein neues, kleines Quadrat. Von diesem kleinen Quadrat falten wir die Seitenmitten auf den Quadratmittelpunkt (Bild 183c) und wieder zurück. Anschließend falten wir zwei gegenüberliegende Dreiecke wieder auseinander (Bild 183d) und die kurzen Seiten des entstandenen Sechsecks zum Quadratmittelpunkt. Diese umgefalteten Seiten richten wir senkrecht auf, wie es Bild 184a zeigt.

Die Bilder 184a, b und c zeigen, wie die dritte Seitenwand der Schachtel gefaltet wird. Die vierte Seitenwand entsteht analog. Im Bild 184d ist die fertige Schachtel zu sehen.

Nun müssen wir uns überlegen, welche Größe wir für das Ausgangspapier der Schachtel wählen müssen, damit diese sich für den Aufbau des Schmetterlingsballs eignet. Dazu bedenken wir, dass der Schmetterlingsball sechs quadratische Seitenflächen hat, die sich als Teile der Seitenflächen eines umbeschriebenen Würfels auffassen lassen. Dieser umbeschriebene Würfel hat die Kantenlänge $w = 2 \cdot \frac{a}{2} = a$. Die Kantenlänge dieses Würfels stimmt also mit der Kantenlänge des Ausgangspapiers für die Module des Schmetterlingsballs überein.

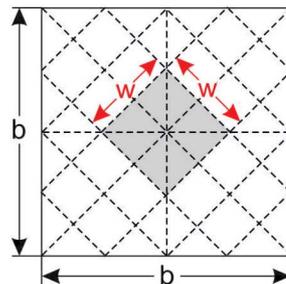


Bild 185

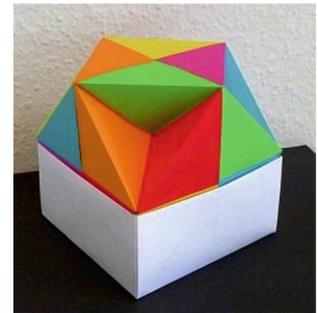


Bild 186

Damit wir nun die Kantenlänge b (in Abhängigkeit von a) bestimmen können, falten wir die Schachtel wieder auseinander, betrachten das Faltmuster und markieren die Grundfläche der Schachtel (Bild 185). Wir erkennen, dass die Diagonale in diesem Quadrat die Länge $4w$ haben muss, damit der Schmetterlingsball in der Schachtel gut aufgebaut werden kann. Weil $w = a$ ist, ergibt sich $4w = 4a = b\sqrt{2}$, woraus $b = 2a\sqrt{2}$ folgt. Dies ist aber die doppelte Länge einer Diagonalen des Ausgangsquadrates (Kantenlänge a) für die Module des Schmetterlingsballs.

Für unsere Schachtel benötigen wir also ein Quadrat mit der Kantenlänge $b = 2a\sqrt{2}$. Aus technischen Gründen sollten wir diese Kantenlänge 2 - 3 mm größer wählen, damit wir beim Zusammenbau des Körpers in der Schachtel etwas 'Spiel' haben.

Wenn wir eine passende Schachtel gefaltet haben, beginnen wir mit vier Modulen, die wir auf der Grundfläche der Schachtel anordnen. Anschließend vervollständigen wir die vier Seiten. Am Ende kommt die Deckfläche dran. Der fertige Aufbau ist im Bild 186 zu sehen.

Nun kann man den Schmetterlingsball vorsichtig aus der Schachtel herausnehmen und wie am Anfang beschrieben verfahren.

Betrachten wir den Schmetterlingsball, so kommt uns dieser bekannt vor. Es handelt sich nämlich um eine Variante des **Kolumbuswürfels**. (vgl. Kapitel 14), bei dem alle acht Ecken nach innen gefaltet wurden. Die Module, die wir dort verwendet haben, unterscheiden sich von diesen hier und der Würfel mit den acht nach innen gefalteten Ecken hält auch besser zusammen. Damit lässt er sich aber nicht als Schmetterlingsball verwendet.

16 Hut, Becher oder Geschicklichkeitsspiel

In [34] wird das Falten eines Fezes beschrieben. Ein Fez ist eine früher im Orient und auf dem Balkan weit verbreitete Kopfbedeckung in der Form eines Kegelstumpfes aus rotem Filz mit flachem Deckel und mit meist schwarzer, blauer oder goldener Quaste (vgl. auch [38]).

Zum Falten dieses Hutes beginnen wir mit einem quadratischen Faltpapier $ABCD$, das entlang der Diagonalen AC zu einem gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck gefaltet wird (Bild 187a).

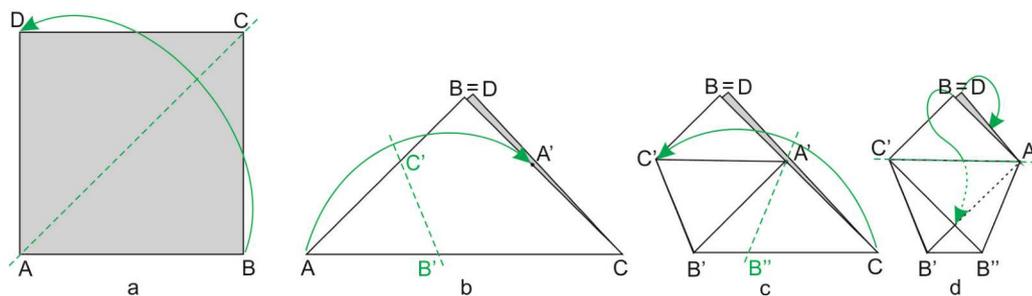


Bild 187: Der Faltprozess

Dann wird A so auf BC gefaltet, dass die umgefaltete Kante parallel zu AC ist. Bezeichnen wir mit A' das Bild von A auf BC , dann ist $B'C'$ die zugehörige Faltlinie. Es soll dann $C'A' \parallel B'C$ gelten (Bild 187b).

Nun wird C auf C' gefaltet (Bild 187c). Die zugehörige Faltlinie scheint durch A' zu gehen und schneidet AC in B'' . Anschließend wird D nach hinten und B nach vorn entlang $C'A'$ gefaltet, wobei die Ecke B in die Tasche des Dreiecks $A'C'B''$ geschoben wird (Bild 187d). Haben wir A' auf CB gut gewählt, dann passt alles zusammen.

Um den Hut zu komplettieren benötigen wir noch eine Quaste. Diese können wir aus drei Papierrechtecken anfertigen. Die Breite dieser Rechtecke sollte etwa die Hälfte der Länge der Strecke $B'B''$ (Bild 187d), ihre Länge etwa der Höhe des Hutes (also dem Abstand von $B'B''$ zu $C'A'$) betragen. Diese drei Rechtecke werden übereinander gelegt und an einer kurzen Seite miteinander verklebt. Anschließend wird der gefaltete Hut an der Strecke $B'B''$ soweit aufgeschnitten, dass die zusammengeklebten Papierrechtecke eingeschoben werden können. Sie werden nun im Inneren des Hutes an eine Seite (ca. 5 mm von $B'B''$) angeklebt. Abschließend werden die Rechtecke außerhalb des Hutes in Längsrichtung in schmale Streifen geschnitten. Bild 188 zeigt das fertige Modell. In [34] wird noch erwähnt, dass für einen passenden Hut das Ausgangsquadrat eine Kantenlänge von mindestens 52 cm haben sollte.

Schneiden wir das gefaltete Modell nicht entlang $B'B''$ auf, so können wir es als Becher verwenden (Abb. 189).

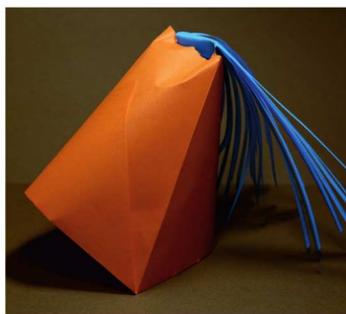


Bild 188: Hut

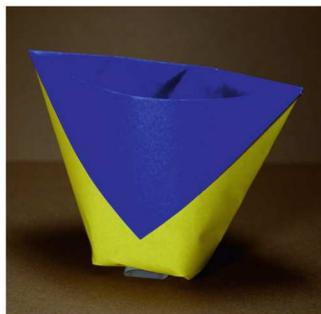


Bild 189: Becher



Bild 190: Spiel

Schließlich können wir auch noch ein kleines Geschicklichkeitsspiel daraus herstellen (Bild 190, vgl. [2], S.130f.). Dazu brauchen wir einen Faden, dessen Länge etwa dem Vierfachen des Abstandes von $B'B''$ zu $C'A'$ (Bild 187d) entspricht. Das eine Ende wird durch ein kleines Loch in der Mitte der Strecke $B'B''$ geschoben und mit einem 'dicken' Knoten versehen, sodass der Faden nicht wieder durch das Loch herausrutschen kann. Am anderen Ende des Fadens wird z.B. eine kleine Holzperle angeknötet. Jetzt nehmen wir den Becher in die Hand und versuchen, durch geeignete Bewegungen die Kugel mit dem Becher aufzufangen.

Nun wenden wir uns noch einmal dem Faltprozess zu. Das Falten von A auf A' ist dahingehend problematisch, dass wir erst durch Probieren die richtige Lage des Punktes A' auf CB finden, sodass die umgefaltete Kante parallel zu AC ist.

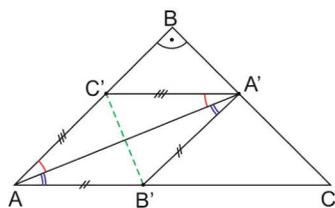


Bild 191

Wir wollen versuchen, den Punkt A' auf andere Weise zu bestimmen. Dazu stellen wir uns vor, dass wir den Punkt A' auf BC in der passenden Lage gefunden haben und überlegen, welche Eigenschaften die entstandene Figur dann hat (Bild 191). $B'C'$ ist wieder die zugehörige Faltlinie. Weil A' durch das Umfalten von A an der Faltlinie $B'C'$ entstanden ist, muss $|AC'| = |C'A'|$ und $|AB'| = |B'A'|$ sein. Verbinden wir noch A mit A' , so entstehen zwei gleichschenklige

Dreiecke $AA'C'$ und $AA'B'$, in denen die Basiswinkel jeweils gleichgroß sind. Weil $C'A' \parallel AC$ ist, muss $|\sphericalangle AA'C'| = |\sphericalangle A'AC|$ (Winkel an geschnittenen Parallelen) sein. Dies bedeutet aber, dass AA' die Winkelhalbierende von $\sphericalangle CAB$ ist.

Damit können wir den gesuchten Punkt A' auf BC nun leichter bestimmen. Wir müssen nur die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei A im Dreieck ACB falten. Diese schneidet CB im gesuchten Punkt A' . Falten wir nun A auf A' , so ist die umgefaltete Kante parallel zu AC , so wie es gefordert war.

Unseren Überlegungen entnehmen wir sogar noch etwas mehr: Die beiden Dreiecke $AA'C'$ und $AA'B'$ sind kongruent zueinander und damit ist $AB'A'C'$ ein Rhombus.

Wir überlegen weiter: Weil $C'A' \parallel AC$ ist, ist auch $|C'A'| = |A'C|$ (Bild 192). Dies bedeutet aber auch, dass beim Falten von C nach C' die zugehörige Faltlinie durch A' gehen muss, so wie wir es am Anfang vermuteten. Diese Faltlinie schneidet AC in B'' . Natürlich ist auch CC' die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei C im Dreieck ACB und $B''CA'C'$ ist ein Rhombus, der zu $AB'A'C'$ kongruent ist.

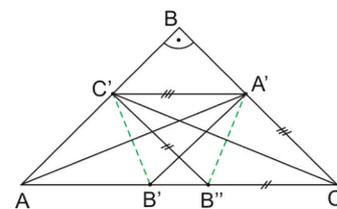


Bild 192

Nun können wir auch die Längen der Strecken $C'A'$ und $B'B''$ berechnen. Dazu gehen wir davon aus, dass unser Ausgangsquadrat die Seitenlänge a hat. Folglich ist $|AC| = a\sqrt{2}$.

Weil sich A' auf CB durch die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle CAB$ ergibt, ist es hilfreich zu wissen, dass jede Winkelhalbierende in einem Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Dieser elementargeometrische Satz ist mit Schulmitteln leicht zu beweisen (vgl. [28]).

Mit der Anwendung dieses Satzes folgt $\frac{|CA'|}{|A'B|} = \frac{|AC|}{|AB|}$, also $\frac{|CA'|}{|CB|-|CA'|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ bzw. $\frac{|CA'|}{a-|CA'|} = \frac{a\sqrt{2}}{a}$. Daraus ergibt sich $|CA'| = (a - |CA'|)\sqrt{2}$ oder $|CA'| \cdot (\sqrt{2} + 1) = a\sqrt{2}$ bzw. $|CA'| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}a = (2 - \sqrt{2})a$.

Für $|B'B''|$ erhalten wir $|B'B''| = |AC| - 2|AB'| = |AC| - 2|CA'| = a\sqrt{2} - 2(2 - \sqrt{2})a = (3\sqrt{2} - 4)a$.

Als Nächstes wollen wir noch den Flächeninhalt des Trapezes $B'B''A'C'$ berechnen. Dazu brauchen wir nur noch den Abstand von $B'B''$ zu $C'A'$ zu bestimmen. Wir zeichnen die Höhe von B auf AC (Bild 193). Dabei bezeichnet H den Höhenfußpunkt auf AC und H' den Schnittpunkt mit $C'A'$. Weil $C'A' \parallel AC$ ist, folgt mit dem Strahlensatz (Zentrum B) $\frac{|BH'|}{|H'H|} = \frac{|BA'|}{|A'C|}$.

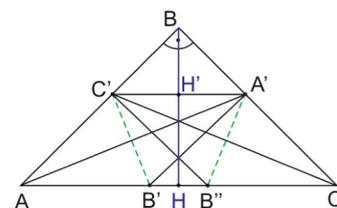


Bild 193

Weil $|BH| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ ist, und wir die anderen Streckenlängen bereits berechnet haben, folgt $\frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}-|HH'|}{|HH'|} = \frac{a-(2-\sqrt{2})a}{(2-\sqrt{2})a} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Daraus erhalten wir $|HH'| = (\sqrt{2} - 1)a$.

Damit ist $|H'H| = |BA'|$, denn $|BA'| = a - |A'C| = a - (2 - \sqrt{2})a = (\sqrt{2} - 1)a$.

Nun können wir den Flächeninhalt des Trapezes $B'B''A'C'$ berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} |B'B''A'C'| &= \frac{|B'B''|+|C'A'|}{2} \cdot |H'H| = \frac{(3\sqrt{2}-4)a+(2-\sqrt{2})a}{2} \cdot (\sqrt{2}-1)a = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)a^2 = ((\sqrt{2}-1)a)^2 \\ &= |BA'|^2 = 2|C'A'B|. \end{aligned}$$

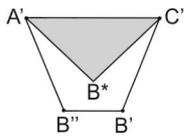


Bild 194

Dieses Ergebnis ist überraschend. Es besagt, dass der Flächeninhalt des Trapezes doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des oberen Dreiecks. Da dieses Dreieck umgefaltet wird, Bild 194 zeigt die fertige Figur, bedeutet dies, dass die schattierte Fläche genau so groß ist wie der nicht bedeckte Teil des Trapezes.

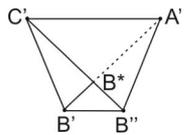


Bild 195

Bild 195 zeigt die fertige Figur von der anderen Seite. Dort ist das entsprechende Dreieck in eine Tasche geschoben und damit nicht sichtbar. Wir erkennen aber hier ein kleines Dreieck $B'B''B^*$. Wir wollen noch den Flächeninhalt dieses kleinen Dreiecks bestimmen. Vielleicht ergibt sich auch hier wieder ein einfacher Zusammenhang zu anderen Teilen der Figur.

Zuerst überlegen wir uns, dass dieses Dreieck gleichschenkelig rechtwinklig ist. Dazu betrachten wir wieder Bild 192. Wir hatten uns überlegt, dass $AB'A'C'$ und $B''CA'C'$ Rhomben sind und folglich $B'A' \parallel AB$ und $B''C' \parallel CB$ gelten muss. Da ACB ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck ist, muss auch $B'B''B^*$ gleichschenkelig und bei B^* rechtwinklig sein. Damit ist aber dieses Dreiecks ein Viertel des Quadrates über $B'B''$. Es gilt also $|B'B''B^*| = \frac{1}{4}|B'B''|^2 = \frac{1}{4}(3\sqrt{2}-4)^2 a^2$ und wir erkennen leider keine offensichtliche und einfache Beziehung dieses Flächeninhaltes zu bereits berechneten Flächeninhalten.

17 Mit Papierfalten geht mehr

Bereits in der Einleitung haben wir darauf hingewiesen, dass hier keine axiomatische Begründung des Papierfaltens erfolgen soll. Dennoch gibt es solche Axiome (vgl. [16]) und eins soll hier kurz genannt werden:

Zu jeweils verschiedenen Punkten P und Q sowie Geraden g und h kann man so falten, dass P auf g und Q auf h kommen.

Die in diesem Axiom beschriebene Faltung ist nicht mit Zirkel und Lineal (im klassischen Sinne) ausführbar und erlaubt das Einpassen einer gegebenen Strecke zwischen zwei gegebenen Geraden. Dieses Einpassen ist im Bild 196 gezeigt.

Mit einem Lineal (im klassischen Sinne) lassen sich Geraden zeichnen. Insbesondere können wir mit einem Lineal die Gerade durch zwei gegebene Punkte zeichnen. Das *ideale* Lineal hat keine Einteilung, ist also nicht zum Messen geeignet. Und mit dem Zirkel (im klassischen Sinne) können wir nur um einen gegebenen Punkt einen Kreis mit gegebenem Radius bzw. durch einen anderen Punkt zeichnen. Der Radius ist dabei durch eine gegebene Strecke vorgegeben und nicht etwa als Maßangabe.

Aufgrund des obigen Axioms können wir mit dem Falten von Papier mehr konstruieren als in der euklidischen Geometrie möglich ist. Speziell lassen sich damit zwei Probleme der klassischen griechischen Geometrie lösen: Die Teilung eines Winkels in drei gleiche Teile und die Verdopplung des Würfels. Beide Probleme werden im folgenden vorgestellt.

17.1 Winkeldreiteilung

Nun wollen wir uns mit der Dreiteilung eines beliebigen Winkels mit Hilfe von Zirkel und Lineal befassen. Da eine solche Konstruktion nicht möglich ist, wird eine Winkeldreiteilung nach Archimedes mit Zirkel und Einschiebelineal angegeben. Dabei spielt das *Einpassen* einer vorgegebenen Strecke eine wichtige Rolle. Anschließend führen wir die Winkeldreiteilung mit einer Faltkonstruktion durch, bei der ebenfalls das *Einpassen* einer vorgegebenen Strecke notwendig ist. Die Richtigkeit der beiden Konstruktionen ist mit Mitteln der Schulgeometrie leicht zu beweisen.

Die Teilung eines Winkels in drei gleichgroße Teile mit Hilfe von Zirkel und Lineal ist eines der großen Probleme der klassischen griechischen Geometrie. Dabei versteht man unter Zirkel und

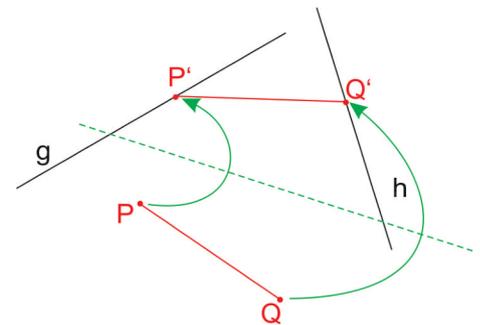


Bild 196: Strecke einpassen

Lineal *ideale* Zeicheninstrumente, wie sie oben beschrieben wurden.

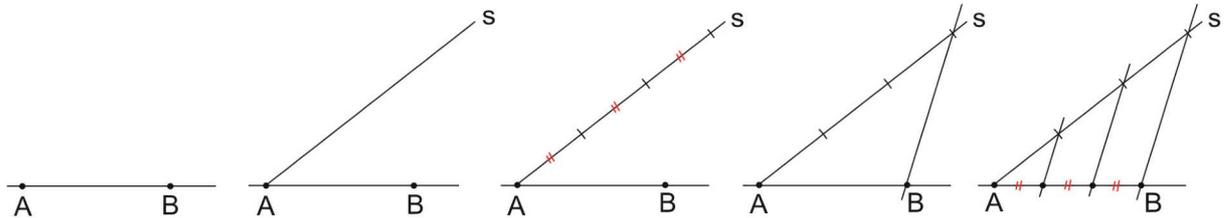


Bild 197: Streckenteilung

Dass man auch die Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal versucht hatte, hat sicher auch damit zu tun, dass jede gegebene Strecke AB mit Zirkel und Lineal in n kongruente Teile zerlegt werden kann, wie es im Bild 197 für $n = 3$ zu sehen ist. Auch das Halbieren eines Winkels mit Hilfe von Zirkel und Lineal ist bekanntlich problemlos möglich, wie es im Bild 198 gezeigt wird. Warum sollte das Teilen eines Winkels mit Hilfe von Zirkel und Lineal in n kongruente Stücke nicht möglich sein? Bei dieser Problematik stießen die griechischen Geometer an ihre Grenzen und fanden keine mögliche Konstruktion für die Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal.

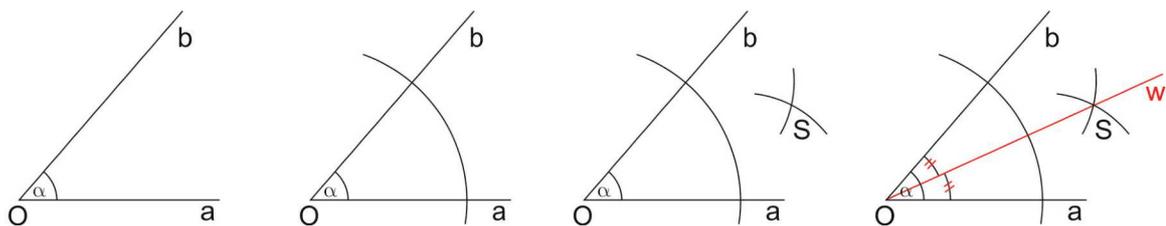


Bild 198: Winkelhalbierung

Erst durch Anwendung moderner algebraischer Methoden konnte 1837 der französische Mathematiker PIERRE LAURENT WANTZEL (1814 - 1948) allgemein zeigen, dass die Winkeldreiteilung mit Hilfe von Zirkel und Lineal prinzipiell nicht möglich ist (vgl. [3], [18]). Trotzdem tauchen immer wieder Konstruktionen auf, die eine Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal angeblich ermöglichen. So schreibt UNDERWOOD DUDLEY in [7], dass er als Reaktion auf sein Buch *A Budget of Trisections* eine Vielzahl von *Lösungen* des Winkeldreiteilungsproblems bekommen hat. Was er davon hält, teilt er aber nicht mit.

Davon unabhängig gibt es spezielle Winkel, z.B. 90° , die sich mit Zirkel und Lineal dritteln lassen, wie es im Bild 199 gezeigt ist.

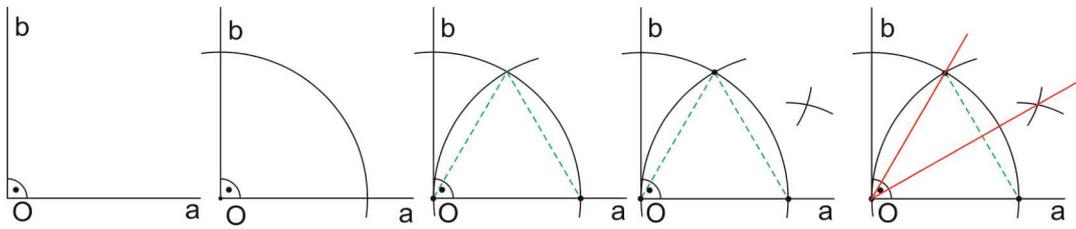


Bild 199: Dreiteilung für 90°

Aber bereits die griechischen Mathematiker der Antike hatten zusätzliche Zeicheninstrumente, mit denen die Winkel-dreiteilung möglich wurde. Eines dieser Instrumente ist das **Einschiebelineal**, welches ein normales Lineal ist, auf dem zwei Markierungen angebracht sind (Bild 200).



Bild 200: Einschiebelineal

Nun beschreiben wir nach ARCHIMEDES (vgl. [12], S.92), wie man einen vorgegebenen Winkel der Größe $\alpha < 90^\circ$ mit Zirkel und Einschiebelineal in drei zueinander kongruente Teile teilt. Dazu bezeichnen wir den Abstand der beiden Markierungen auf dem Einschiebelineal mit d . Um den Scheitel O des Winkels α wird ein Kreis k mit dem Radius d gezeichnet, der den Schenkel s_1 des Winkels in A und dessen Verlängerung über O hinaus in B schneidet. C ist der Schnittpunkt des gezeichneten Kreises mit dem zweiten Schenkel s_2 des Winkels α (Bild 201a). Nun kommt das Einschiebelineal zum Einsatz (Bild 201b). Es wird so in die Figur *eingepasst*, dass das Einschiebelineal durch C geht, eine Markierung auf dem Kreis k und die andere Markierung auf OB^+ liegen. Die Position der beiden Markierungen bezeichnen wir mit U und V . Nun sind wir mit der Dreiteilung von α fertig, denn $|\sphericalangle BU V| = \frac{1}{3}\alpha$.

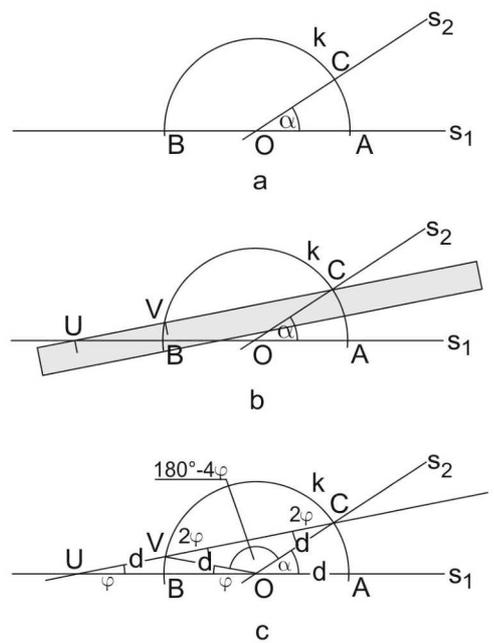


Bild 201

Die Richtigkeit dieser Behauptung lässt sich leicht nachprüfen. Dazu verbinden wir nur noch O mit V und bezeichnen den Winkel $\sphericalangle OUV$ mit φ .

Weil OUV ein gleichschenkliges Dreieck ist, ist auch $|\sphericalangle UOV| = \varphi$ und damit $|\sphericalangle OVU| = 180^\circ - 2\varphi$, woraus sich $|\sphericalangle OVC| = 2\varphi$ ergibt. Da auch VOC ein gleichschenkliges Dreieck ist, ist auch $|\sphericalangle OCV| = 2\varphi$ und damit auch $|\sphericalangle VOC| = 180^\circ - 4\varphi$ (Bild 201d).

Betrachten wir nun die Winkel in O . Es ist $\varphi + (180^\circ - 4\varphi) + \alpha = 180^\circ$, woraus sich sofort $\varphi = \frac{1}{3}\alpha$ ergibt. Damit ist die Behauptung bewiesen und die Winkeldreiteilung mit Hilfe des Einschiebelineals

gelingen.

Neben dem Einschiebelineal gibt es noch weitere Methoden zur Winkeldreiteilung, die z.B. in [6] beschrieben werden.

Nun soll noch die Möglichkeit der Winkeldreiteilung mit Hilfe des Faltens von Papier durchgeführt werden.

Wir gehen von einem Rechteck $ABCD$, z.B. einem DIN-A4 Blatt, aus und legen zuerst den Winkel α fest, der zu dritteln ist. Dazu falten wir in das Rechteck $ABCD$ eine beliebige Faltnie s , die durch die Ecke A geht. Im Bild 202a ist so gefaltet, dass diese Faltnie die Seite DC in S schneidet. Dann sei $\sphericalangle SAB$ der zu dritteln Winkel α .

Um diese Winkeldreiteilung durchzuführen, falten wir $ABCD$ parallel zu AB beliebig. Es entstehen die Punkte E und F auf AD bzw. BC . Diese Faltung wird nun wieder rückgängig gemacht. Nun wird AB auf EF gefaltet, wodurch die Punkte G und H auf AD bzw. BC entstehen. Auch diese Faltung wird wieder rückgängig gemacht.

Nun kommt auch hier das *Einpassen*. Die Rechteckseite AD wird so umgefaltet, dass A auf GH und gleichzeitig E auf s zu liegen kommt (Bild 202b). A' und E' bezeichnen die Bildpunkte von A und E . Bei dieser Faltung geht auch G nach G' . K und L sind die Schnittpunkte dieser Faltnie mit AD bzw. AB .

Nun falten wir das Blatt wieder auf und verbinden (mit einem Lineal oder durch Falten) den Punkt A mit A' und mit G' (Bild 202c). Dann ist $|\sphericalangle BAA'| = |\sphericalangle A'AG'| = |\sphericalangle G'AE'| = \frac{1}{3}\alpha$ und die Winkeldreiteilung des Winkels α ist beendet.

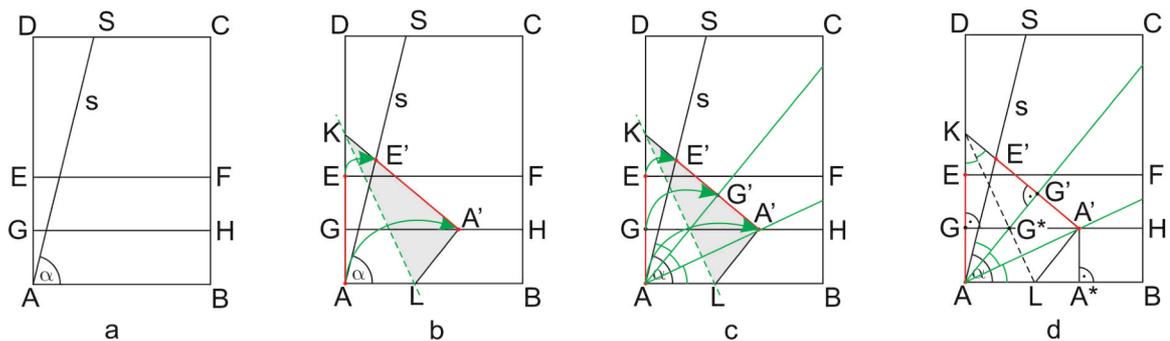


Bild 202: Winkeldreiteilung

Diese Behauptung soll nun bewiesen werden. Dazu betrachten wir das Faltmuster im Rechteck $ABCD$ mit den eingezeichneten Verbindungslinien AA' und AG' (Bild 202d). Die Faltnie KL ist auch eine Spiegelachse, bei der A, E, G Original- und A', E', G' die zugehörigen Bildpunkte sind. Auch A' kann als Originalpunkt aufgefasst werden, für den dann A der zugehörige Bildpunkt ist. Folglich wird die Gerade $g(GA')$ auf die Gerade $g(AG')$ abgebildet und damit schneiden sich diese

beiden Geraden in einem Punkt G^* auf der Spiegelachse KL .

Aufgrund dieser Spiegelung ist wegen $HG \perp AD$ auch $AG' \perp A'K$.

Nun fällen wir das Lot von A' auf AB . A^* bezeichnet den zugehörigen Lotfußpunkt. Dann ist klar, dass $|A'A^*| = |A'G'| = |G'E'|$ ist. Folglich ist $AA^*A' \cong AA'G'$, da beide Dreiecke rechtwinklig sind, in AA' übereinstimmen und $|A'A^*| = |A'G'|$ ist (*Ssw*). Damit ist auch $|\sphericalangle A^*AA'| = |\sphericalangle A'AG'|$.

Ebenso ist $AA'G' \cong AG'E'$, da auch diese beiden Dreiecke rechtwinklig sind, in AG' übereinstimmen und $|A'G'| = |G'E'|$ ist (*sws*). Damit ist auch $|\sphericalangle A'AG'| = |\sphericalangle G'AE'|$.

Insgesamt ergibt sich also $|\sphericalangle A^*AA'| = |\sphericalangle A'AG'| = |\sphericalangle G'AE'| = \frac{1}{3}\alpha$.

Damit ist aber die Faltkonstruktion zur Winkeldreiteilung bewiesen.

Die Winkelgröße $\frac{1}{3}\alpha$ tritt auch noch am Punkt K auf. Weil $KL \perp AA'$ und $KA' \perp AG'$ ist, ist auch $|\sphericalangle LKA'| = |\sphericalangle A'AG'|$ und wegen der Spiegelung an KL folgt dann $|\sphericalangle AKL| = |\sphericalangle LKA'| = \frac{1}{3}\alpha$.

17.2 Würfelverdopplung

Genau wie die Winkeldreiteilung (Kapitel 17.1) ist die Würfelverdopplung eines der großen Probleme der klassischen griechischen Geometrie. In [5], S. 5, wird eine historische Quelle zu diesem Problem angegeben:

„Eratosthenes grüßt den König Ptolemäus.

Es wird erzählt, daß einer der alten Tragiker den Minos (alten König von Kreta) auf die Szene gebracht habe, im Begriff, ein Grab für den Glaulos (seinen Sohn) herstellen zu lassen, und daß Minos, als er bemerkte, daß dieses Grab auf allen Seiten 100 Fuß lang war, gesagt habe:

Zu klein entwarfst du mir die Königliche Gruft,
Verdopple sie, des Würfels doch verfehle nicht!
Verdopple jede Kante schnell des Grabs!

Nun ist klar, daß er sich geirrt hat. ... ”

Da mit der Verdopplung eines Würfels das Doppelte seines Volumens gemeint ist, erkennen wir im obigen Text gleich einen Fehler. Denn das Verdoppeln der Kanten eines gegebenen Würfels verachtfacht dessen Volumen. Übrigens wird in [18], S.177, erwähnt, dass dieser Brief von ERATOSTHENES (um 230 v.u.Z.), der oben zitiert wurde, vermutlich gefälscht ist.

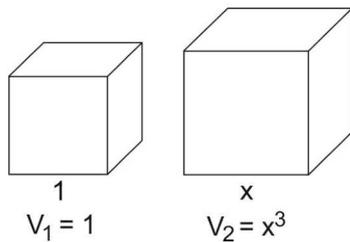


Bild 203: Würfelverdopplung

Gehen wir im Folgenden von einem Würfel mit der Kantenlänge 1 aus und betrachten dazu einen Würfel mit doppeltem Volumen (Bild 203). Die Kantenlänge x dieses Würfels ist gesucht.

Es gilt also $V_2 = 2 \cdot V_1$, d. h., $x^3 = 2 \cdot 1$, woraus $x = \sqrt[3]{2}$ folgt.

Das Problem der Würfelverdopplung besteht also darin, zu einer gegebenen Einheitsstrecke eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ mit Hilfe eines *idealen* Zirkels und eines *idealen* Lineals, zu konstruieren. Genau wie die Winkeldreiteilung gelang den Geometern des antiken Griechenlands die Würfelverdopplung allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal nicht.

Auch hier wurde erst mittels Anwendung moderner algebraischer Methoden 1837 durch den französische Mathematiker PIERRE LAURENT WANTZEL (1814 - 1848) allgemein gezeigt, dass auch die Würfelverdopplung mit Hilfe von Zirkel und Lineal prinzipiell nicht möglich ist (vgl. [18]).

Im obigen Brief des ERATOSTHENES wird weiter erwähnt, dass durch HIPPOKRATES (um 440 v.u.Z.) die Würfelverdopplung auf das Problem des Findens der beiden mittleren Proportionalen x und y zu zwei gegebenen Größen g_1 und g_2 , d.h. $g_1 : x = x : y = y : g_2$, zurückgeführt wurde. Aber auch dafür fand man keine Konstruktion nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal.

Die Geometer des antiken Griechenlands fanden aber auch hierfür Zeicheninstrumente, mit denen die mittleren Proportionalen bestimmt werden konnten. Einen guten Überblick dazu findet man in [6] bzw. in [18].

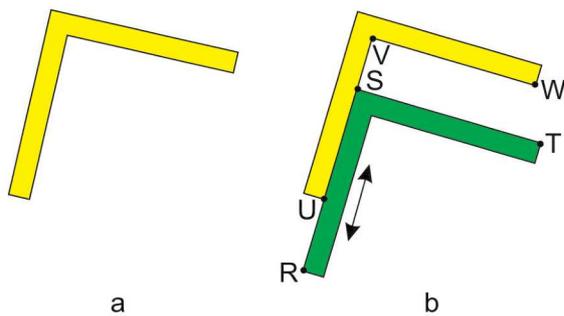


Bild 204: Winkelhaken

Wir zeigen hier die Konstruktion mittels zweier *Winkelhaken*. Diese Konstruktion wird von EUTOKIOS (um 560) beschrieben, der sie PLATON (427 - 347 v.u.Z.) zuschreibt (vgl. [18], S. 178). Ein solcher Winkelhaken ist im Bild 204a dargestellt und besteht aus zwei senkrecht in einer Ecke zusammentreffenden Leisten.

Zur Würfelverdopplung, d.h., zur Bestimmung von $\sqrt[3]{2}$, benötigen wir zwei solche Winkelhaken, wobei der eine an einem Schenkel des anderen entlang gleiten kann.

Diese Situation ist mit entsprechenden Bezeichnungen im Bild 204b gezeigt.

Gehen wir von einem Würfel mit der Kantenlänge 1 aus. Dieser Würfel soll nun verdoppelt werden. Dazu zeichnen wir zwei zueinander senkrechte Geraden a und b , die sich in O schneiden (Bild 205a). Auf a legen wir den Punkt A mit $|OA| = 1$ und auf b den Punkt B mit $|OB| = 2$ fest.

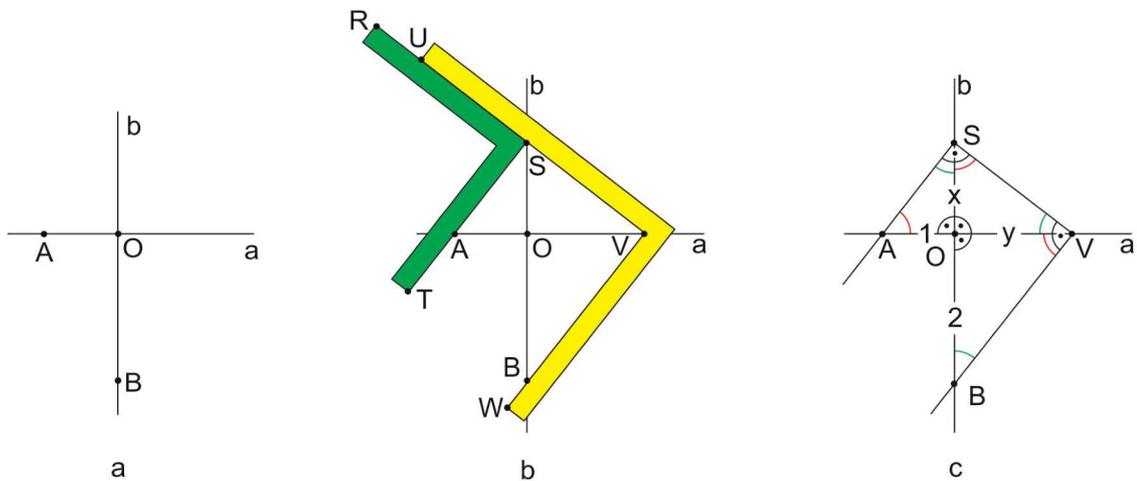


Bild 205

Nun werden die Winkelhaken *eingepasst*. Dieses Einpassen erfolgt so (Bild 205b), dass V auf OA^- zu liegen kommt, während VW^+ durch B geht und gleichzeitig der zweite Winkelhaken so verschoben werden kann, dass S auf OB^- liegt, während ST^+ durch A geht. Damit man diesen Prozess besser nachvollziehen kann, wäre es an dieser Stelle sinnvoll, wenn man sich zwei solche Winkelhaken aus dünner Pappe herstellt und dies selbst ausprobiert.

Haben wir nun die Winkelhaken in die Figur so eingepasst, wie es gefordert wird, entsteht die im Bild 205c gezeigte Figur. In dieser Figur kommt es uns besonders auf die drei rechtwinkligen Dreiecke AOS ; SOV und VOB an. Diese drei Dreiecke sind zueinander ähnlich (*www*), da aufgrund des Einpassens der Winkelhaken bei S und V ebenfalls rechte Winkel sind.

Nun ist $|OA| = 1$ und $|OB| = 2$, und wir setzen $|OS| = x$ und $|OV| = y$. Wegen der Ähnlichkeit der drei genannten rechtwinkligen Dreiecke ergibt sich die fortlaufende Proportion $1 : x = x : y = y : 2$, in der x und y die beiden mittleren Proportionalen zu 1 und 2 sind. Damit ist aber das Problem der Bestimmung der beiden mittleren Proportionalen zu zwei gegebenen Größen (hier 1 und 2) mit Hilfe der Winkelhaken-Konstruktion gelöst.

Wir berechnen nun x und y , um zu sehen, dass dadurch auch das Problem der Würfelverdopplung gelöst ist. Aus der obigen fortlaufenden Proportion ergeben sich insbesondere die beiden Gleichungen

$$(I): \frac{1}{x} = \frac{x}{y} \text{ und } (II): \frac{1}{x} = \frac{y}{2}.$$

Aus (I) erhalten wir $y = x^2$ und aus (II) folgt $y = \frac{2}{x}$. Durch Gleichsetzung dieser beiden Beziehungen erhalten wir $x^2 = \frac{2}{x}$, woraus $x^3 = 2$ und damit $x = \sqrt[3]{2}$ folgt. Damit entspricht die Länge der Strecke OS der gesuchten Kantenlänge des Würfels mit doppeltem Volumen und das Problem der Würfelverdopplung mit Hilfe des Einpassens von Winkelhaken ist gelöst.

Nun berechnen wir noch y . Aus (1): folgt $y = x^2$ und aus (II) erhalten wir $x = \frac{2}{y}$. Setzen wir die zweite in die erste Gleichung ein, so erhalten wir $y = (\frac{2}{y})^2$, woraus $y = \frac{4}{y^2}$, also $y^3 = 4$ und damit $y = \sqrt[3]{4}$ folgt. Dies ist aber gerade die Kantenlänge eines Würfels mit vierfachem Volumen bezüglich des Ausgangswürfels (Kantenlänge 1).

Damit bestimmen die beiden mittleren Proportionalen zu 1 und 2 die Kantenlängen von zwei Würfeln, der eine mit doppeltem und der andere mit vierfachem Volumen bezüglich des Ausgangswürfels.

Bevor wir uns der Würfelverdopplung mit dem Falten von Papier zuwenden, soll hier noch die Legende erzählt werden, wonach die Einwohner von Deli zur Überwindung einer Pestepidemie ein Orakel befragten. Dieses Orakel stellte ihnen die Aufgabe, den würfelförmigen Altar (mit Zirkel und Lineal) zu verdoppeln. Die Delier schickten Gesandte zu den Geometern in Platons Akademie mit der Bitte, diese Aufgabe zu lösen (vgl. [6]). Aus diesem Grund heißt die Aufgabe der Würfelverdopplung auch *Delisches Problem*.

Nun zum Papierfalten. Aus Bild 205c können wir eine Faltanleitung zur Bestimmung von $\sqrt[3]{2}$ herleiten. Dazu spiegeln wir A, B und O an der Geraden s durch S und V und erhalten aus Bild 4c das Bild 206a. A', B', O', a' und b' sind die Bilder von A, B, O, a und b bei dieser Spiegelung. Füllen wir von A' das Lot auf b , so erhalten wir dort den Lotfußpunkt A^* . Weil $AOS \cong A'A^*S$ ist, gilt auch $|A'A^*| = 1$. Ebenso liefert das Lot von B' auf a den Lotfußpunkt B^* , und auch hier gilt $|B'B^*| = 2$, weil $BVO \cong B^*B^*V$ ist.

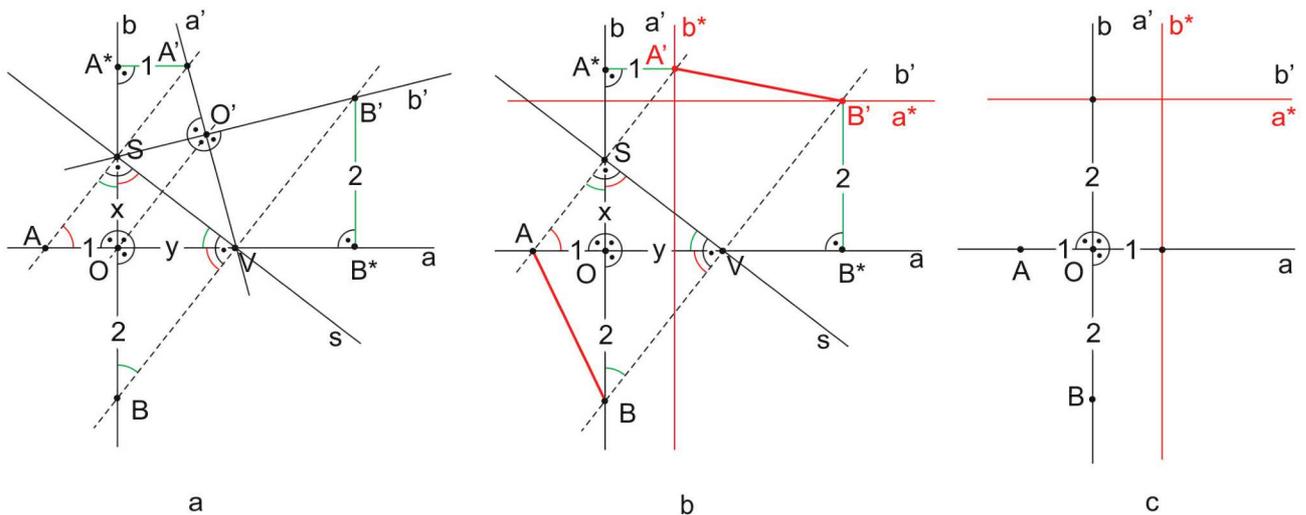


Bild 206

Zeichnen wir nun durch A' die Parallele b^* zu b und durch B' die Parallele a^* zu a , so haben b, b^* den Abstand 1 und a, a^* den Abstand 2, wie es im Bild 206b gezeigt ist. Diese beiden Parallelen sind unabhängig von der Lage der beiden Punkte S und V .

Bedenken wir nun noch, dass wegen der Spiegelung an s auch $|AB| = |A'B'|$ ist, so können wir die folgende Aufgabe formulieren:

Finde in der Ausgangssituation, wie sie im Bild 206c dargestellt ist, eine Geradenspiegelung so, dass dabei A auf b^* und gleichzeitig B auf a^* abgebildet werden.

Wenn wir die zugehörige Spiegelgerade s gefunden haben, dann bestimmt diese auf a und b die Punkte V und S und damit auch $\sqrt[3]{4}$ und $\sqrt[3]{2}$, wie wir uns das vorher überlegt haben. Diese Spiegelachse s lässt sich als Faltnie aufassen, die beim Falten von Papier entsteht. Dazu müssen wir auf einem Blatt Papier zuerst die Ausgangssituation von Bild 206c erzeugen. Wir benutzen ein quadratisches Blatt Papier mit der Seitenlänge 8, um zu einem Würfel mit der Seitenlänge 1 durch Falten von Papier eine Strecke mit der Länge $\sqrt[3]{2}$ zu bestimmen.

Im ersten Schritt wird das Ausgangsquadrat parallel zu beiden Kanten halbiert (Bild 207a). Dadurch entstehen die beiden Faltnie a und b , die sich in O schneiden.

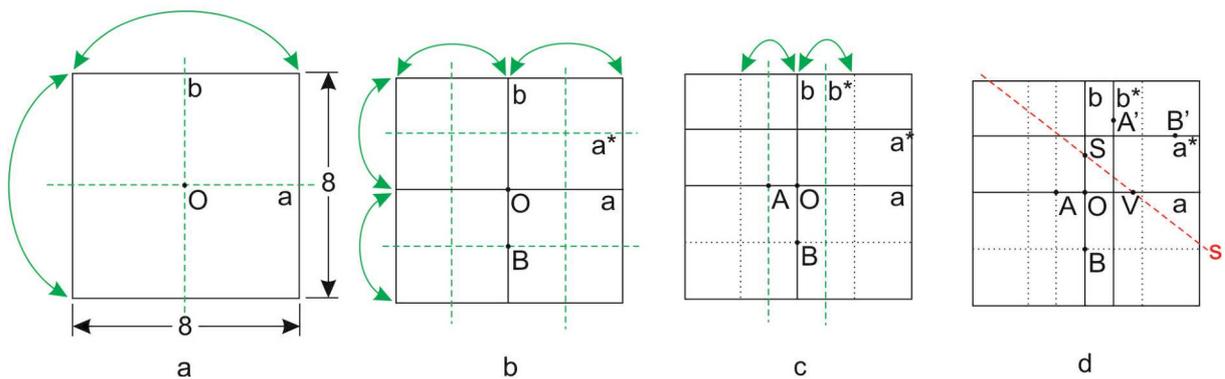


Bild 207

Nun werden die vier entstandenen Rechtecke entsprechend Bild 207b parallel zu den langen Kanten halbiert. Die oberhalb von a liegende (zu a parallele) Faltnie bezeichnen wir mit a^* , und den Schnittpunkt der unter a liegenden Faltnie mit b nennen wir B .

Als Nächstes werden die beiden inneren Rechtecke mit der Seite b parallel zu dieser halbiert, wie es im Bild 207c gezeigt ist. Die rechts von b liegende Faltnie bezeichnen wir mit b^* und die linke schneidet a in A .

Weil das Ausgangsquadrat die Kantenlänge 8 hatte, ist $|OA| = 1$, $|OB| = 2$ und $\angle AOB = 90^\circ$. Damit haben wir die gleiche Situation wie im Bild 206c erzeugt.

Nun kommt auch hier das Einpassen. Dazu wird so gefaltet, dass A auf b^* und gleichzeitig B auf a^* zu liegen kommt. A' und B' sind die zugehörigen Bildpunkte und s die Faltnie, die b in S und a in V schneidet, wie es im Bild 207d dargestellt ist.

Zur praktischen Ausführung dieser Faltung ist es empfehlenswert das Quadrat erst durch A und B

nach *hinten* umzufalten, wie es im Bild 208a zu sehen ist. Anschließend kann man das, zum Teil doppelt liegende Papier so umfalten, dass A und B entsprechend den Forderungen auf b^* und a^* eingepasst werden, wie es im Bild 208b zu sehen ist.

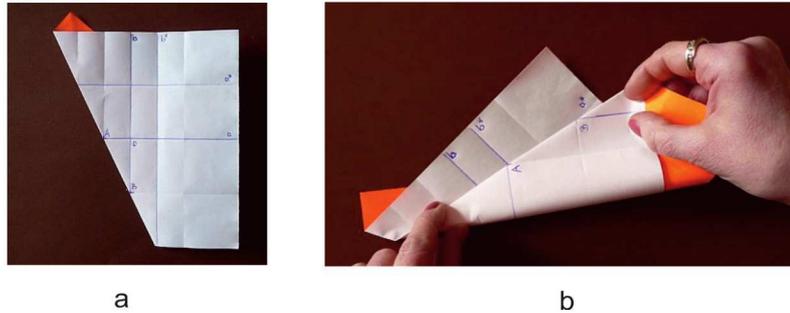


Bild 208

Weil A' und B' die Bildpunkte von A und B bei der Spiegelung an s sind (Bild 207d), stehen AA' und BB' senkrecht auf s . Damit ist aber die gleiche Figur entstanden, die bereits im Bild 4c zu sehen war und die mit Hilfe der Winkelhaken konstruiert wurde. Damit ist aber auch klar, dass OS die gesuchte Länge $\sqrt[3]{2}$ hat. Der Beweis hierfür kann unabhängig von der Konstruktion mit den Winkelhaken auch über die Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke AOS , SOV , BVO geführt werden.

Damit ist die Würfelverdopplung auch mit Hilfe des Faltens von Papier gelöst. Auch dabei spielte das Einpassen einer Strecke eine wichtige Rolle. Da die Würfelverdopplung nicht mit Zirkel und Lineal möglich ist, muss das Einpassen der Punkte A und B auf b^* und a^* eine Faltoperation sein, die nicht mit Zirkel und Lineal nachvollziehbar ist.

Die oben, auf Basis der Winkelhaken-Konstruktion entwickelte Faltung zur Würfelverdopplung wird ebenfalls in [4] beschrieben.

Literatur

- [1] Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschlüsse der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003.
- [2] Barff,U.; Burkhardt, I.; Maier, J.: *Das große farbige Bastelbuch für Kinder*. Falken, 1993.
- [3] Baptist, Peter: *Winkeldreiteilung und Trisektierer*. In: PM 29 (1987) Nr.1.
- [4] Bläuenstein, Ernst: *Geometrische Konstruktionen 3.Grades mittels Papierfaltung*. Sonderheft von Origami Deutschland, 1977.
- [5] Breidenbach, Walter: *Das Delische Problem (Die Verdopplung des Würfels)*. B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 2. Auflage, 1952.
- [6] Breidenbach, Walter: *Die Dreiteilung des Winkels*. B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1951.
- [7] Dudley, Underwood: *Mathematik zwischen Wahn und Witz*. Birkhäuser Verlag, 1995.
- [8] Euklid: *Die Elemente*, IV Teil, Buch X. Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H. Leipzig, 1936 (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 241,).
- [9] Flachsmeyer, J.: *Origami und Mathematik: Papier falten – Formen gestalten*. Helderermann Verlag, 2008.
- [10] Freudenthal, Hans: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Band 2.
- [11] Fuse, Tomoko: *Unit Polyhedron Origami*. Japan Pubn, 2006.
- [12] Gericke, Helmuth: *Mathematik in Antike und Orient; Mathematik im Abendland*. Fourier Verlag GmbH; Auflage: 4, 1996.
- [13] Henn, H.-W.: *Origamics – Papierfalten mit mathematischen Spürsinn*. In: Die neue Schulpraxis, Heft 6/7, 2003, S. 49-53.
- [14] Hull, Thomas: *Project Origami*. Taylor & Francis Ltd., 2006.
- [15] Hungerbühler, Norbert: *Origami - von der Kunst und der Wissenschaft des Papierfaltens*. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 2013, Heft 46, S. 19 - 32.

-
- [16] Huzita, H.: *Understanding Geometry through Origami Axioms*. In : J. Smith ec.: *Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91)*, 1992: British Origami Society.
- [17] Kaganova, Ekaterina: *Das Geheimnis des DIN-Formates*. MatheWelt in „mathematik lehren“, Heft 167, August, 2011.
- [18] Kaiser, Hans; Nöbauer, Wilfried: *Geschichte der Mathematik*. Oldenbourg, 2002.
- [19] Kasahara, Kunihiko: *Origami Omnibus*. Japan Publications, Inc., Tokyo, 1988 (15. Auflage 2010).
- [20] Kasahara, Kunihiko: *Origami figürlich und Geometrisch*. Augustus Verlag, München, 2000.
- [21] Kasahara, K.: *Origami ohne Grenzen*. Knaur, 2004.
- [22] Lichtenberg, Georg Christoph: *Briefwechsel*, Band III (1785–1792). Verlag C. H. Beck, 1990.
- [23] Mitchell, D.: *Mathematical Origami - Geometrical shapes by paper folding*. Tarquin Publications, 2003.
- [24] Mulatinho, P.: *Pfifiges Origami*. Knaur, 2003.
- [25] Niese, G.: *100 Eier des Kolumbus*. Kinderbuchverlag Berlin (4.Auflage).
- [26] Ostwald, Wilhelm: *Die Weltformate: I. Für Drucksachen*. Fr. Seybold's Buchhandlung, 1911.
- [27] Platon: *Sämtliche Werke*. Band 1, Berlin, 1940, S. 410-458.
Auch unter <http://www.zeno.org/Philosophie/M/Platon/Menon>.
- [28] Richter, Ch.; Schmitz, M.: *Übersicht zur Geometrie in der Schule (Sekundarstufe I)*. FSU Jena, Preprint, 2014. (http://www.minet.uni-jena.de/preprints/richter_14)
- [29] Schmitz, M.: *Quadrate*. In: *Der Mathematikunterricht*. Heft 6, 2009, Seite 21 - 31.
- [30] Schmitz, M.: *Papierfalten auch im Mathematikunterricht – Begründungen und Beispiele*. In: Ludwig, M.; Kleine, M. (Hrsg): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*, S. 765 - 768, WTM-Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster, 2012.
- [31] Schmitz, M.: *Zahlen falten*. In: *PM*. Heft 59, Okt. 2014, Seite 21 - 30.
- [32] Schmitz, M.: *Wie die Gräser im Winde.... Kongruenzüberlegungen am Origami-Grashalm*. In: *PM*. Heft 72, 2016, Seite 16 - 20.
-

- [33] Schmitz, M.: *Von Bechern und Hüten. Ideen für gestufte Vertiefungen*. In: PM. Heft 72, 2016, Seite 26 - 29.
- [34] Schönherr, J.: *Wir falten und falzen*. Rudolf Arnold Verlag, Leipzig, 1975.
- [35] Walser, Hans: *Der Goldene Schnitt*. EAG.LE, Leipzig, 2013 (6. bearbeitete und erweiterte Auflage).
- [36] Walser, Hans: *DIN A4 in Raum und Zeit*. EAG.LE, Leipzig, 2013.
- [37] Wikipedia-Eintrag *Papierformat*: <http://de.wikipedia.org/wiki/Papierformat>
- [38] Wikipedia-Eintrag *Fes (Kopfbedeckung)*: [https://de.wikipedia.org/wiki/Fes_\(Kopfbedeckung\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Fes_(Kopfbedeckung)).